

## DIPLOMSKI IZPIT IZ UPORABNE MATEMATIKE

1. Komisijo za diplomski izpit sestavljajo: predsednik komisije, mentor pri diplomskem delu in en do dva člana.
2. Diplomski izpit je sestavljen iz dveh delov: ustnega izpita in zagovora diplomskega dela.
3. Pri ustnem izpitu dobi kandidat tri vprašanja: prvo iz analize, drugo iz algebre in tretje iz numeričnih metod, verjetnostnega računa ali računalniške matematike.
4. Če kandidat uspešno opravi ustni diplomski izpit, ima v roku enega tedna zagovor diplomskega dela. Pri zagovoru ima na razpolago 20 minut, da pregledno opiše svoje delo. Po tem dobi nekaj vprašanj iz snovi, ki jo obravnava diplomsko delo.
5. Ocena diplomskega izpita je zaokroženo povprečje med povprečno oceno izpitov in vaj iz strokovnih predmetov med študijem, oceno ustnega diplomskega izpita in oceno diplomskega dela z zagovorom.
6. Vprašanja pri ustnem diplomskem izpitu so iz snovi, ki je zajeta v naslednjih poglavjih.

**ANALIZA.** Metrika na množici, ekvivalenca metrik. Norma in skalarni produkt na vektorskem prostoru. Zaporedja v metričnih prostorih; limite in stekališča. Cauchyjev pogoj, polnost; Banachov izrek o skrčitvah. Kompaktnost, kompaktne množice v evklidskih prostorih; zaporedja v kompaktnih prostorih. Lebesgueova lema o pokritjih. Povezanost. Zvezne preslikave med metričnimi prostori, enakomerna zveznost; zveznost in konvergentna zaporedja. Zvezne preslikave in zvezne realne funkcije na kompaktnih prostorih. Zvezne preslikave na povezanih prostorih.

Obseg realnih števil; polnost. Odvod funkcije in diferencial. Rolleov in Lagrangev izrek, Taylorjeva formula. Lokalni ekstremini funkcij. Riemannov in izlimitirani Riemannov integral. Odnos med integralom in primitivno funkcijo, eksistenca primitivne funkcije. Konvergenca monotoni zaporedij realnih števil. Vrste; konvergenca in absolutna konvergenca. Konvergenčni kriteriji za pozitivne in alternirajoče vrste. Dvojne vrste, množenje vrst. Funkcijska zaporedja in vrste, enakomerna konvergenca. Zveznost, odvajanje in integriranje funkcijskih vrst. Fourierjeve vrste, konvergenca.

Parcialni odvodi. Taylorjeva formula. Diferencial preslikave med dvema evklidskima prostoroma, Jacobijeva matrika; smerni odvodi. Izrek o inverzni funkciji, izrek o implicitni funkciji. Lokalni ekstremini, vezani ekstremini. Riemannov in Lebesgueov integral na  $\mathbb{R}^n$ , volumen in mera množice v  $\mathbb{R}^n$ . Substitucija v integralu, Fubinijev izrek. Prostor  $L^2$ . Zveznost in odvajanje integralov s parametrom. Skalarna in vektorska polja na 3-razsežnem prostoru. Gradient, rotor in divergenca. Krivuljni

in ploskovni integrali skalarnih in vektorskih polj. Krivuljni integral potencialnega vektorskega polja, Stokesov in Gaussov izrek.

Obseg kompleksnih števil. Holomorfne funkcije. Potenčne vrste. Elementarne funkcije pri kompleksnem argumentu. Krivuljni integral v kompleksni ravnini. Cauchyjev izrek in Cauchyjeva integralska formula. Razvoj holomorfne funkcije v Taylorjevo vrsto. Laurentova vrsta in izolirane singularne točke. Residui. Riemannova sfera. Konformne preslikave, Möbiusove transformacije. Regularna parametrizacija krivulje v prostoru. Dolžina krivulje. Tangenta, normala in binormala krivulje, ukrivljenost. Regularna parametrizacija ploskve v prostoru. Površina ploskve. Prva in druga fundamentalna forma parametrizirane ploskve. Ukrivljenost ploskve.

Eksistenčni izreki za diferencialne enačbe. Linearne diferencialne enačbe in linearni sistemi. Variacijski račun, kanonski sistem, izoperimetrični problem in Ljusternikova lema. Diferencialne enačbe v kompleksnem, hipergeometrična funkcija, sferne funkcije, cilindrske funkcije. Linearni diferencialni operator 2. reda. Klasični ortogonalni polinomi.

Fourierjeva in Laplaceova transformacija. Parcialne diferencialne enačbe prvega reda, linearna in kvazilinearna enačba, karakteristični sistem. Klasifikacija linearnih parcialnih diferencialnih enačb drugega reda. Laplaceova enačba, fundamentalna rešitev, potenciali. Valovna enačba na premici, na ravnini, v prostoru. Prevajanje toplote na neskončnem nosilcu. Dirichletova naloga, postavitev. Prevajanje toplote na omejenem nosilcu po Fourierju. Nihanje končne strune po d'Alembertu in po Fourierju.

**ALGEBRA.** Osnovni pojmi teorije množic. Relacije, funkcije. Delno urejene množice. Aksiom izbire, Zornova lema. Algebrائيčne operacije, splošne lastnosti. Vektorska algebra. Determinanta. Linearni (vektorski) prostori. Baza prostora in dimenzija. Linearni podprostori; ravnine. Prostori in algebre linearnih preslikav. Linearne preslikave in matrike. Linearni funkcionali, dualni prostori. Linearne enačbe in sistemi. Lastne vrednosti in lastni vektorji. Karakteristični polinom matrike. Diagonalizacija matrik. Minimalni polinom matrike, Jordanova forma. Norma in skalarni produkt. Hilbertov prostor. Ortogonalni vektorji in sistemi, ortogonalizacija. Adjungirane preslikave, adjungirane matrike. Unitarni, ortogonalni, Hermitski in normalni operatorji in matrike. Pozitivni operatorji in matrike. Bilinearni in kvadratni funkcionali.

Polgrupe in grupe, splošne lastnosti. Podgrupe in odseki. Podgrupe edinke in faktorske ali kvocientne grupe. Homomorfizmi in izomorfizmi grup, avtomorfizmi, komutativni diagrami. Končne grupe, izreki Sylowa. Rešljive grupe, permutacijske grupe. Abelove grupe, direktna vsota. Proste Abelove grupe, torzija. Končno generirane Abelove grupe. Kolobarji in obsegi, osnovne lastnosti in zgledi (kvaternioni). Podkolobarji in ideali. Faktorski ali kvocientni kolobarji, kolobar ostankov. Kolobar celih števil je glavni kolobar, enačba  $ax + by = c$  v celih številih. Homomorfizmi

in izomorfizmi kolobarjev, lastnosti in zgledi, karakteristika kolobarja. Dodajanje enice (enote) kolobarju. Obseg (polje) ulomkov. Izrek o enolični faktorizaciji v celih številih, primitivne pitagorejske trojice, Eulerjeva funkcija. Glavni kolobarji, deljivost, pogoj naraščajočih verig, izrek o enolični faktorizaciji. Maksimalni ideali in praideali. Gaussova (cela) kompleksna števila. Kolobarji polinomov: nad komutativnim obsegom (poljem), nad Gaussovim kolobarjem, ničle polinomov in razstavljanje, Wilsonov izrek, nerazcepna Gaussova števila. Kolobarji polinomov več spremenljivk, simetrični polinomi. Moduli, podmoduli, faktorski ali kvocientni moduli, direktne vsote, homomorfizmi. Tenzorski produkt desnega in levega modula, tenzorski produkt homomorfizmov. Tenzorski produkti nad komutativnimi kolobarji. Teorija komutativnih obsegov (polj): algebraične in transcendentne razširitve, končni (Galoisovi) obsegi. Uporaba v geometriji, konstrukcije z ravnilom in šestilom. Iskanje ničel polinomov z radikali. Razpadni obsegi. Galoisova grupa razširitve, Galoisova grupa polinoma. Galoisova razširitev obsega (polja). Mreže, princip dualnosti. Distributivne mreže. Booleove algebre in Booleovi kolobarji. Modulske mreže.

## NUM. MATEMATIKA, VERJETNOST, RAČUNALNIŠTVO.

**NUMERIČNA MATEMATIKA.** Izvori napak pri numeričnem računanju. Občutljivost problema, konvergenca in stabilnost numerične metode.

Sistemi linearnih enačb. Občutljivost, ocene napak. Gaussova metoda in izpeljanke. Ortogonalne metode. Iteracijske metode. Predoločeni sistemi. Algebraični problem lastnih vrednosti. Občutljivost, ocene napak. Potenčna metoda. Jacobijeva metoda. Kombinirane metode za simetrične in nesimetrične matrike. LR in QR algoritem.

Nelinearne enačbe v v eni in več dimenzijah. Navadna iteracija, Newtonova metoda. Interpolacija in aproksimacija. Uporaba polinomov. Enakomerna aproksimacija, aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov. Numerično odvajanje. Numerično integriranje. Newton-Cotesova osnovna in sestavljena pravila, Gaussove kvadraturene formule. Rombergova ekstrapolacija.

Navadne diferencialne enačbe. Začetni problemi. Enokoračne metode. Konvergenca. Večkoračne metode. Ničelna stabilnost, konsistentnost, konvergenca. Robni problemi. Diferenčna metoda, streljanje. Parcialne diferencialne enačbe. Laplaceova enačba, prevajanje toplote, valovna enačba. Diferenčna metoda za reševanje teh modelnih enačb.

**VERJETNOSTNI RAČUN.** Izidi in verjetnostni prostori, dogodki. Elementarna pogojna verjetnost in neodvisnost. Pregled sredstev iz teorije mere: konvergenčni izreki, Fubinijev izrek, Radón-Nikodýmov izrek.

Ideja slučajne spremenljivke in slučajnega vektorja. Porazdelitve, neodvisnost. Matematično upanje. Porazdelitve funkcij slučajnih spremenljivk ali vektorjev. Pogojno matematično upanje in pogojne porazdelitve.

Rodovne funkcije. Procesi razvejanja. Karakteristične funkcije, edinost. Konvergenca slučajnih spremenljivk, zakoni velikih števil. Šibka konvergenca in centralni limitni izrek.

Definicija markovke verige, klasifikacija stanj. Povrnljivost, verjetnost srečanja. Krepka lastnost Markova. Invariantne mere in ergodijske lastnosti markovskih verig.

**RAČUNALNIŠTVO.** Časovna in prostorska zahtevnost. Sklad, vrsta, seznam, drevo, graf. Vrsta s prednostjo, kopica, uravnotežena drevesa. Deli in vladaj. Požrešna metoda. Sestopanje. Diskretno dinamično programiranje. Razveji in omeji. Vpeto drevo, drevo najkrajših poti. Pregledovanje grafov. Množenje matrik. 0/1 nahrbtnik. Problem trgovskega potnika.

Lokalna optimizacija in konveksno programiranje. Linearno programiranje. Dualnost v linearnem programiranju. Matrične igre. Problem razvoja po omrežju. Izrek o celih rešitvah in primeri uporabe. Prirejanja in pokritja v dvodelnih grafih. Omrežja in problem maksimalnega pretoka. Modeli računanja. Razredi P, NP in co-NP. NP-polnost. Vzporedni algoritmi. Verjetnostni algoritmi. Aproksimacijski algoritmi in aproksimacijske sheme.

Ljubljana, 27. junij 2002