

DIPLOMSKI IZPIT IZ TEORETIČNE MATEMATIKE

1. Komisijo za diplomski izpit sestavljajo: predsednik komisije, mentor pri diplomskem delu in en do dva člana.
2. Diplomski izpit je sestavljen iz dveh delov: ustnega izpita in zagovora diplomskega dela.
3. Pri ustnem izpitu dobi kandidat tri vprašanja: prvo iz analize, drugo iz algebre in tretje iz topologije.
4. Če kandidat uspešno opravi ustni diplomski izpit, ima v roku enega tedna zagovor diplomskega dela. Pri zagovoru ima na razpolago 20 minut, da pregledno opiše svoje delo. Po tem dobi nekaj vprašanj iz snovi, ki jo obravnava diplomsko delo.
5. Ocena diplomskega izpita je zaokroženo povprečje med povprečno oceno izpitov in vaj iz strokovnih predmetov med študijem, oceno ustnega diplomskega izpita in oceno diplomskega dela z zagovorom.
6. Vprašanja pri ustnem diplomskem izpitu so iz snovi, ki je zajeta v naslednjih poglavjih.

ANALIZA. Obseg realnih števil; polnost. Odvod funkcije in diferencial. Rolleov in Lagrangeov izrek, Taylorjeva formula. Lokalni ekstremi funkcij. Riemannov in izlimitirani Riemannov integral. Odnos med integralom in primitivno funkcijo, eksistenca primitivne funkcije. Zaporedja realnih števil. Vrste; konvergenca in absolutna konvergenca. Konvergenčni kriteriji za pozitivne in alternirajoče vrste. Dvojne vrste, množenje vrst. Funkcijska zaporedja in vrste, enakomerna konvergenca. Zveznost, odvajanje in integriranje funkcijskih vrst. Fourierjeve vrste, konvergenca.

Parcialni odvodi. Taylorjeva formula. Diferencial preslikave med dvema evklidskima prostoroma, Jacobijeva matrika; smerni odvodi. Izrek o inverzni funkciji, izrek o implicitni funkciji. Lokalni ekstremi, vezani ekstremi. Riemannov in Lebesgueov integral na \mathbb{R}^n , volumen in mera množice v \mathbb{R}^n . Substitucija v integralu, Fubinijev izrek. Prostor L^2 . Zveznost in odvajanje integralov s parametrom. Skalarna in vektorska polja na 3-razsežnem prostoru. Gradient, rotor in divergenca. Krivuljni in ploskovni integrali skalarnih in vektorskih polj. Krivuljni integral potencialnega vektorskega polja, Stokesov in Gaussov izrek.

Obseg kompleksnih števil. Holomorfne funkcije. Potenčne vrste. Elementarne funkcije pri kompleksnem argumentu. Krivuljni integral v kompleksni ravnini. Cauchyjev izrek in Cauchyjeva integralska formula. Razvoj holomorfne funkcije v Taylorjevo vrsto. Laurentova vrsta in izolirane singularne točke. Residui. Riemannova sfera. Konformne preslikave, Möbiusove transformacije. Regularna parametrizacija

krivulje v prostoru. Dolžina krivulje. Tangenta, normala in binormala krivulje, ukrivljenost. Regularna parametrizacija ploskve v prostoru. Površina ploskve. Prva in druga fundamentalna forma parametrizirane ploskve. Ukrivljenost ploskve.

Eksistenčni izreki za diferencialne enačbe. Linearne diferencialne enačbe in linearni sistemi. Variacijski račun, kanonski sistem, izoperimetrični problem in Ljusternikova lema. Diferencialne enačbe v kompleksnem, hipergeometrična funkcija, sferne funkcije, cilindrske funkcije. Linearni diferencialni operator 2. reda. Klasični ortogonalni polinomi.

Fourierjeva in Laplaceova transformacija. Parcialne diferencialne enačbe prvega reda, linearna in kvazilinearna enačba, karakteristični sistem. Klasifikacija linearnih parcialnih diferencialnih enačb drugega reda. Laplaceova enačba, fundamentalna rešitev, potenciali. Valovna enačba na premici, na ravnini, v prostoru. Prevajanje toplote na neskončnem nosilcu. Dirichletova naloga, postavitev. Prevajanje toplote na omejenem nosilcu po Fourierju. Nihanje končne strune po d'Alembertu in po Fourierju.

Linearni topološki prostori, osnovne lastnosti. Lokalno konveksni topološki prostori. Hahn-Banachov izrek. Linearni funkcionali, eksistenca zveznih linearnih funkcionalov. Zvezne linearne preslikave. Normirani prostori. Izrek o enakomerni omejenosti. Spekter linearnega operatorja. Kompaktni operatorji.

Pozitivne mere in definicija integrala. Izreki o zamenjavi limite in integrala. Reprezentacija pozitivnih in zveznih linearnih funkcionalov na prostorih zveznih funkcij. Prostori L^p ; polnost, adjungirani prostori. Kompleksne mere in Radon-Nikodymov izrek. Integracija na kartezičnem produktu in Fubinijev izrek. Odvajanje mer v n -razsežnem evklidskem prostoru. Funkcije in mere na realni osi, osnovni izrek analize.

ALGEBRA. Osnovni pojmi teorije množic. Relacije, funkcije. Delno urejene množice. Aksiom izbire, Zornova lema. Algebraične operacije, splošne lastnosti. Vektorska algebra. Matrična algebra. Determinanta. Linearni (vektorski) prostori. Baza prostora in dimenzija. Linearni podprostori; ravnine. Prostori in algebre linearnih preslikav. Linearne preslikave in matrike. Linearni funkcionali, dualni prostori. Linearne enačbe in sistemi. Lastne vrednosti in lastni vektorji. Karakteristični polinom matrike. Diagonalizacija matrik. Minimalni polinom matrike, Jordanova forma. Norma in skalarni produkt. Hilbertov prostor. Ortogonalni vektorji in sistemi, ortogonalizacija. Adjungirane preslikave, adjungirane matrike. Unitarni, ortogonalni, Hermitski in normalni operatorji in matrike. Pozitivni operatorji in matrike. Bilinearni in kvadratni funkcionali.

Polgrupe in grupe, splošne lastnosti. Podgrupe in odseki. Podgrupe edinke in faktor-ske ali kvocientne grupe. Homomorfizmi in izomorfizmi grup, avtomorfizmi, komutativni diagrami. Končne grupe, izreki Sylowa. Rešljive grupe, permutacijske grupe. Ablove grupe, direktna vsota. Proste Ablove grupe, torzija. Končno generirane

Abelove grupe. Kategorija in funktor, univerzalni in kouniverzalni objekt. Produkt, koprodukt, prosti objekt. Kolobarji in obsegi, osnovne lastnosti in zgledi (kvaternioni). Podkolobarji in ideali. Faktorski ali kvocientni kolobarji, kolobar ostankov. Kolobar celih števil je glavni kolobar, enačba $ax + by = c$ v celih številih. Homomorfizmi in izomorfizmi kolobarjev, lastnosti in zgledi, karakteristika kolobarja. Dodajanje enice (enote) kolobarju. Obseg (polje) ulomkov. Izrek o enolični faktorizaciji v celih številih, primitivne pitagorejske trojice, Eulerjeva funkcija. Glavni kolobarji, deljivost, pogoj naraščajočih verig, izrek o enolični faktorizaciji. Maksimalni ideali in praideali. Gaussova (cela) kompleksna števila. Kolobarji polinomov: nad komutativnim obsegom (poljem), nad Gaussovim kolobarjem, ničle polinomov in razstavljanje, Wilsonov izrek, nerazcepna Gaussova števila. Kolobarji polinomov več spremenljivk, simetrični polinomi. Moduli, podmoduli, faktorski ali kvocientni moduli, direktne vsote, homomorfizmi. Eksaktnost, povezava z injektivnostjo, surjektivnostjo, razcepna eksaktnost. Prosti in projekтивni moduli. Tenzorski produkt desnega in levega modula, tenzorski produkt homomorfizmov. Tenzorski produkti nad komutativnimi kolobarji. Desna eksaktnost tenzoriranja z leve, distributivnost direktne vsote za tenzoriranje z leve. Teorija komutativnih obsegov (polj): algebraične in transcendentne razširitve, končni (Galoisovi) obsegi. Uporaba v geometriji, konstrukcije z ravnilom in šestilom. Iskanje ničel polinomov z radikali. Razpadni obsegi. Galoisova grupa razširitve, Galoisova grupa polinoma. Galoisova razširitev obsega (polja). Zveza med vmesnimi obsegi in podgrupami Galoisove razširitve. Zveza med rešljivostjo Galoisove grupe polinoma in rešljivostjo tega polinoma z radikali. Mreže, princip dualnosti. Distributivne mreže. Booleove algebre in Booleovi kolobarji. Modulske mreže.

TOPOLOGIJA. Topološki prostor, osnovne definicije: limita, zvezna preslikava, homeomorfizem. Podprostor. Vložitev. Baza prostora. Separacijski aksiomi. Metrični prostor, ekvivalenca metrik, izometrija. Polnost, napolnitev; Banachovo skrčitevno načelo. Kompaktnost. Zvezne preslikave kompaktnih prostorov. Kompaktni metrični prostori. Lokalna kompaktnost. Kompaktifikacija z eno točko. Kompaktno-odprta topologija. Povezanost in povezanost s potmi. Komponente. Popolna nepovezanost, Cantorjeva množica. Lokalna povezanost. Produktna topologija. Multiplikativne topološke lastnosti. Kvocientni prostor, inducirane zvezne preslikave. Kvocientne preslikave. Zlepek. Projekтивni prostori. Transformacijska grupa in prostor orbit. Urisonova lema in Tietzejev razširitveni izrek. Absolutni ekstenzorji in absolutni retrakti.

Brouwerjev izrek o negibni točki in ekvivalentni izreki. Jordanov in Schoenfliesov izrek v ravnini in večrazsežnih prostorih. Invarianca odprtih množic. Simplicialni in politopni kompleksi. Poliedri. Simplicialne in kosoma linearne preslikave. CW kompleksi. Topološke in kosoma linearne mnogoterosti. Orientacija triangulirane mnogoterosti. Klasifikacija kompaktnih ploskev.

Kategorija, funktor, naravna transformacija funktorjev. Homotopija in izotopija.

Homotopski tip, deformacijska retrakcija. Fundamentalna grupa in višje homotopske grupe. Seifert-van Kampenov izrek in fundamentalna grupa CW kompleksa. Krovni prostor. Povezava s fundamentalno grupo. Regularni krovni prostori in krovne transformacije. Verižni kompleksi in algebraična homologija. Simplicialna in singularna homologija in odnos med njima. Grupa H_0 . Grupa H_n za n -razsežno mnogoterost, stopnja preslikave. Eulerjeva karakteristika. Eilenberg-Steenrodovi aksiomi.

Ljubljana, 27. junij 2002