Fakulteta za matematiko in fiziko
Jadranska 19
1000 Ljubljana

SEMINAR II

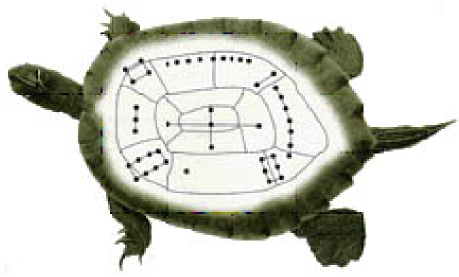
MAGIČNI KVADRAT

Vida Vukašinovič
4.letnik, pedagoška matematika
V Ljubljani, november 2005

Kazalo

1 Zgodovina

Magični kvadrat ima bogato zgodovino, datirano tja v obdobje 2000 let p.n.š. Po Kitajski legendi je takratni cesar Yu, med sprehodom ob Rumeni reki, na njenem bregu zagledal želvo , ki je na oklepu imela nenavaden vzorec. Cesar se je odločil, da bo ta nenavaden matematičen vzorec poimenoval Lo Shu. Prvi magični kvadrat se je v 1. stoletju pojavil v knjigi Da-Dai Liji.



Slika 1: Lo Shu-najstarejši znani magični kvadrat

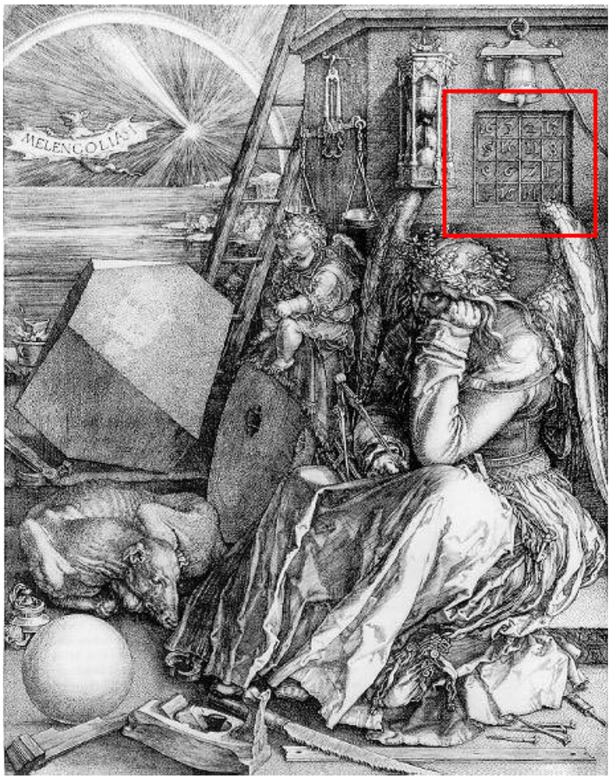
Magični kvadrat je bil na Kitajskem prisoten marsikje; uporabljali so ga pri astrologiji, prerokovanju, prav tako pa v psihologiji, pri razlaganju naravnih fenomenov in človeških lastnostih. S časom pa je magični kvadrat prodrl tudi v druga področja kitajske kulture. Tako je, na primer kitajski porcelan, razstavljen v muzejih in privatnih kolekcijah, okrašen z arabskimi napisi in magičnimi kvadrati.

Magični kvadrat je najverjetneje potoval iz Kitajske do Indije in naprej proti arabskim deželam, preko njih je prispel tudi v Evropo in kasneje na Japonsko. V Indiji je služil marsičemu drugemu, kot širjenju matematične znanosti. Varahamihira je uporabljal kvadrat 4. reda pri zapisu receptov za parfume v njegovi knjigi Brhatsamhita (ca. 550 n.š.). Najstarejše datiran magični kvadrat 3. reda v Indiji je zapisan v Vrnda-jevem medicinskem delu Siddhayoga (ca. 900 n.š.) in je bil v pomoč pri rojstvu otrok.

Malo je znanega o začetkih matematičnih raziskav magičnih kvadratov v islamskem svetu. Raziskave so pokazale, da so bile njegove matematične zakonitosti znane pred obstojem arabskega sveta in so jih tam omenjali zaradi matematičnih zakonitosti in ne magije, kot je bilo sprva na Kitajskem. Tako njegovo starodavno arabsko poimenovanje "wafq ala'dad" pomeni "harmonična razporeditev števil". Kasneje v 11. in 12. stoletju so islamski matematiki odkrili ogromno enostavnih pravil pri kreiranju magičnih kvadratov. V 13. stoletju so magični kvadrati doživeli zopet velik preporod v smislu magije in prerokovanja. To se odraža v naslednjem Cammanovem citatu, kjer govori o njegovi spiritualni pomembnosti: "Če so bili magični kvadrati včasih majhni modeli vesolja, jih lahko zdaj gledamo kot simbolično predstavitev življenja in njegovega konstantnega toka in obnavljanja preko božanskega vira iz središča vesolja." (Prussin 1986, p. 75)

Z magičnimi kvadrati je bila prepojena tudi kultura zahodne Afrike. Kvadrati so bili pomembni predvsem v duhovnem smislu, upodabljali so jih na oblekah, maskah in verskih predmetih. Vplivali pa so celo na načrtovanje in gradnjo hiš. V zgodnjem 18. stoletju je znani astronom, matematik, mistik in astrolog Muhammad ibn Muhammad v nekih svojih rokopisih predstavil in razložil, kako narediti magični kvadrat sodega reda.

V 15. stoletju je Bizantinski pisatelj Manuel Moschopoulos predstavil magične kvadrate Evropi. Kot v drugih kulturah, jih je tudi on povezoval s prerokovanjem, alkimijo in astrologijo. Prvi tiskani dokaz o pojavu magičnega kvadrata v Evropi sega v leto 1514, ko je nemški slikar Albrechta Durer v svoji slavni grafiki Melanholija I v zgornjem desnem kotu upodobil magični kvadrat in v njegovo spodnjo vrstico zapisal njeno letnico nastanka.



Slika 2: malencolia 1

Na Japonsko je prvi pripeljal magične kvadrate Chen Dawei s svojo knjigo Suan fa tong zog, objavljeno leta 1592. Zaradi popularnosti teme so jo študirali skoraj vsi najboljši Japonski matematiki in tako je prvič evidentiran magični kvadrat v knjigi Kuchi-zusam, kjer je razložen kvadrat 3. reda.

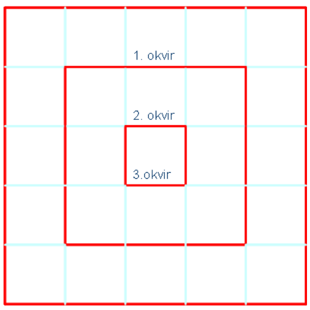
V 17. stoletju so magičnim kvadratom začeli posvečati resno pozornost in tako je 1687-88 francoski aristokrat Antoine de la Loubere študiral matematično teorijo konstrukcije magičnih kvadratov, leta 1686 pa je Adamas Kochansky razširil magične kvadrate v tri dimenzije. Tekom konca 19. stoletja so problem magičnega kvadrata pridružili problemom verjetnosti in analize. Danes pa se magični kvadrat obravnava v povezavi z analizo, kombinatoriko, algebro in geometrijo. Tako zaradi svoje celovitosti magični kvadrati še vedno ostajajo magični.

2 Magični kvadrat

Magični kvadrat je katerakoli ureditev mreže kvadratov, kjer je vsota števil po vrsticah, vsota števil po stolpcih in vsota po diagonalah vedno enaka neki konstanti Sn. Kvadrat, ki vsebuje n vrstic in n stolpcev se imenuje magični kvadrat reda n. Pri tradicionalni obliki magičnega kvadrata posamezna celica vsebuje število od 1,2,...n^2 in hkrati so vsa ta števila prisotna v mreži kvadrata. Vsota vseh teh števil je enaka $n^2(n^2+1)/2$. Zaradi tega velja, da je konstanta tradicionalne oblike magičnega kvadrata z n vrsticami enaka Sn = (1+2+...+n^2)/n = n(n^2+1)/2.

2.1 Metoda Okvirjanja

Pri preučevanju magičnih kvadratov so evropski matematiki Stifel, Pascal in Fermant uporabljali metodo okvirjanja, ki so jo na vzhodu poznali že v 10. stoletju. Metodo je v 13. stoletju podrobneje predstavil Az-Zinjani, ki je živel v Bagdadu. Metoda deluje na kvadratih lihega reda. Kot že samo ime pove kvadrat gradimo preko okvirjev (glej sliko) in sicer od zunanjega proti notranjemu.



Slika 3: okvirjanje

Zaradi značilnosti arabske pisave, pri tej metodi stolpce štejemo od desne proti levi.

						1
						2
						3

Slika 4: 1 postavimo na sredino 1. stolpca, 2 pod 1 in tako naprej vse do predzadnjega polja nad diagonalo.

			7			
						1
						2
						3
4	5	6				

Slika 5: Nato v zadnji stolpec in zadnjo vrstico zapišemo naslednika prejšnega. Nadaljujemo z zapisom naslednikov v vsa polja do sredine srednjega stolpca, ki ostane prazen. V srednje polje 1. vrstice zapišemo naslednje število.

10			7			
9						
8						
						1
						2
						3
4	5	6				

Slika 6: Premaknemo se v polje zadnjega (skrajno levega) stolpca nad vrstico v sredini in tam nadalljujemo z zapisom števil po stolpcu navzgor.

10			7	11	12	
9						
8						
						1
						2
						3
4	5	6				

Slika 7: Nadalje vpišemo števila v polja med srednjim in prvim (skrajno desnim) poljem prve vrstice.

10	45	44	7	11	12	46
9						41
8						42
49						1
48						2
47						3
4	5	6	43	39	38	40

Slika 8: Pri konstruiranju kvadrata reda n, dopolnimo ostala polja okvirja tako, da je vsota medsebojno nasproti ležečih polj enaka n^2+1. Poljema v kotih predpišemo polji v nasprotnem kotu kvadrata.

10	45	44	7	11	12	46
9	19		17	20		41
8	18					42
49					13	1
48					14	2
47	15	16				3
4	5	6	43	39	38	40

Slika 9: Naslednji okvir zapolnimo po istem postopku kot prej. Začnemo z naslednikom zadnjega uporabljenega števila v prejšnjem okvirju.

10	45	44	7	11	12	46
9	19	34	17	20	35	41
8	18				32	42
49	37				13	1
48	36				14	2
47	15	16	33	30	31	3
4	5	6	43	39	38	40

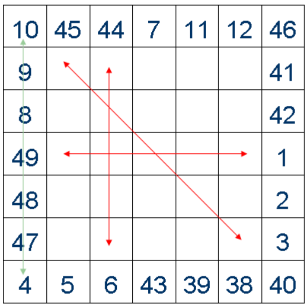
Slika 10: Na isti način, kot prej zapolnimo okvir tako, da bo vsota nasproti ležečih polj enaka n^2+1, pri čemer je n red kvadrata.

10	45	44	7	11	12	46
9	19	34	17	20	35	41
8	18	24	23	28	32	42
49	37	29	25	21	13	1
48	36	22	27	26	14	2
47	15	16	33	30	31	3
4	5	6	43	39	38	40

Slika 11: Enako nadaljujemo v naslednjem okviru in tako vse do zadnjega, ki vsebuje samo še eno prosto polje. V to polje zapišemo naslednika števila pri katerem smo končali šteti v predzadnjem okviru.

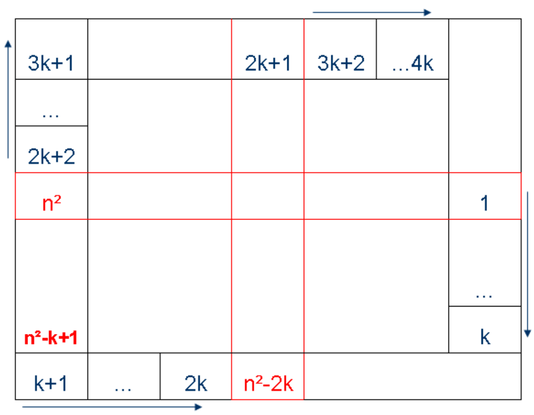
2.2 Dokaz metode okvirjanja

Pri dokazu te metode je potrebno le podrobneje pogledati posamezne korake konstrukcije. Zaradi konstrukcije preko okvirjev in določanja nasprotnih vrednosti polj tako, da je vsota le-teh vedno n^2+1, hitro vidimo, da je vsota po vrsticah, diagonalah in po stolpcih enaka n$(n^2)/2$. Problematična sta le stolpca in vrstici na robu kvadrata. Slika 12.



Slika 12: dokaz metode okvirjanja

Pri teh dveh stolpcih in vrsticah je potrebno napisati splošne člene zunanjega okvira in jih sešteti. Skico dokaza za n = 2k+1 si lahko ogledate na sliki 13.



Slika 13: skica dokaza pri zunanjih stolpcih in vrsticah

2.3 Metoda označevanja polj

Ibn Qunfundh je v 14. stoletju predstavil metodo označevanja polj, ki pa najverjetneje ni njegova, temveč je v svoji knjigi le zbral na kup različna gradiva in med drugim tudi to metodo. V njej je predstavil štiri tipe kvadratov. Trije tipi so sodi in jih delimo na sodo-sode (n = 2^p, p>=2), soso-sodo-lihe (n = 2^p(2k+1), p>=2), sodo-lihe (n = 2(2k+1)) ter lihe (n = 2k+1), kot jih že poznamo.

2.3.1 sodo-sodi in sodo-sodo-lihi kvadrati

Osnovna zahteva pri označevanju polj je, da se polovico polj v vrstici oz. stolpcu označi in polovico pusti neoznačenih. Glej sliko 14.

X			X
	X	X	
	X	X	
X			X

Slika 14: metoda označevanja

X	X					X	X
	X	X			X	X	
		X	X	X	X		
X			X	X			X
X			X	X			X
		X	X	X	X		
	X	X			X	X	
X	X					X	X

x	x	x							x	x	x
	x	x	x					x	x	x	
		x	x	x			x	x	x		
			x	x	x	x	x	x			
x				x	x	x	x				x
x	x				x	x				x	x
x	x				x	x				x	x
x				x	x	x	x				x
			x	x	x	x	x	x			
		x	x	x			x	x	x		
	x	x	x					x	x	x	
x	x	x							x	x	x

Slika 15: primer označitve polj za n = 8 in n = 12

Števila vpisujemo, tako da štejemo polja z desne proti levi po vrsticah. Če je polje označeno, število vpišemo, sicer ga pustimo praznega. Kvadrat dopolnimo na enak način s štetjem, le da začnemo šteti skrajno levo v zadnji vrstici in zapolnjujemo le polja, ki so ostala prazna. Slika 17 prikazuje potek metode pri kvadratu 4. reda.

X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X
X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X

Slika 16: Če je kvadrat reda 16 ali več, ga razdelimo na kvadrate 4. reda in te označimo na že poznani način.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Slika 17: metoda označevanja

2.3.2 dokaz konstrukcije sodo-sodih in sodo-sodo-lihih kvadratov

Najpomembneje pri tej konstrukciji je, da je polovica polj označenih in polovica neoznačenih, hkrati pa velja simetrija označenih polj glede na horizontalno in vertikalno os. Slika 18.

X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X
X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X

Slika 18: metoda označevanja

Za začetek opazujmo c-ti stolpec. Če je polje v vrstici p označeno, potem je polje p', za katero velja p+p' = n+1, tudi označeno. V vrstici p je število x = n(p-1)+c, v vrstici p' pa je x' = n(p'-1)+c. Ti dve številli seštejemo in dobimo: x+x' = n(p+p'-2)+2c = n(n-1)+2c. Podobno, če polje v vrstici p ni označeno, potem polje p', za katero velja p+p' = n+1 tudi ni označeno. V vrstici p je število y = n(n-p)+n-c+1, v vrstici p' pa je y' = n(n-p')+n-c+1. Glej sliko 19.

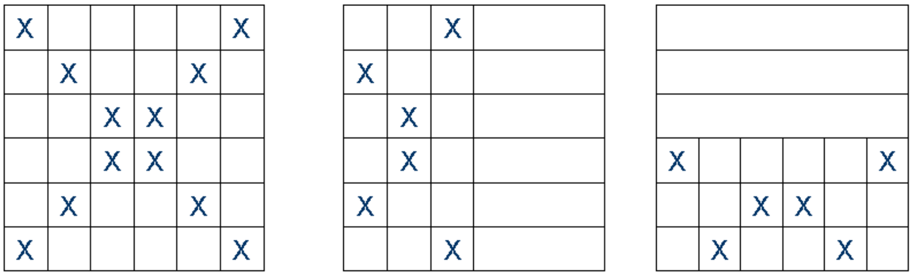
X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X
X			X	X			X
	X	X			X	X	
	X	X			X	X	
X			X	X			X

Slika 19: metoda označevanja

Ti dve števili seštejemo in dobimo: y+y' = n(2n-p-p')+2n-2c+2 = n(n-1)+2n-2c+2. Vidimo, da sta obe vsoti neodvisni od izbire vrstice p. Če obe vsoti seštejemo, vse skupaj pomnožimo z n in delimo s 4 (upoštevali smo po štiri števila naenkrat) dobimo ravno konstanto kvadrata: (n/4)(n(n-1)+2c+n(n-1)+2n-2c+2) = n(n^2+1)/2. Dokazali smo, da je vsota števil po vrsticah ravno n(n^2+1)/2, podobno dokažemo tudi za stolpce. Hitro pa opazimo tudi, da so polja po diagonali vedno označena in je vsota njihovih vrednosti enaka n(n^2+1)/2.

2.3.3 sodo-lihi kvadrati

Sodo-lihi kvadrati so kvadrati 2(2k+1)-tega reda; torej n = 2(2k+1). V tem primeru je potrebno pri konstrukciji združiti več metod označevanja in ne obstaja lepo pravilo na kakšen način to storiti. Na slikah 20 in 21 si lahko ogledate primer konstrukcije kvadrata 6.reda, za katero so potrebne tri metode označevanja.



Slika 20: označitev polj pri konstrukciji kvadrata 6.reda

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Slika 21: konstrukcija kvadrata 6.reda

3 Zaključek

Magični kvadrat me je pritegnil ravno zaradi svoje, na prvi pogled, magičnosti, bogate zgodovine in na tisoče, v skrivnost zavitih zgodb. Menim, da z njim lahko navdušimo tako naravoslovno usmerjene dijake, kot tiste, ki jih veliko bolj, kot matematika, zanimajo zgodovina, jeziki in umetnost. Dijak, ki ga matematika zanima že sama po sebi, bo z veseljem sledil zanimivemu zaporedju korakov in si kaj hitro želel izvedeti, kaj se skriva za to "magično"konstrukcijo, ki nas pripelje do magičnega kvadrata. Dijaki, ki so jim všeč zgodovina, jeziki in umetnost, matematika pa jim niti ni nujno najljubša, pa bodo odkrili, da se tudi njim ljubi predmeti prepletajo z matematiko in navsezadnje tudi tako matematično obarvani ostajajo zanimivi oziroma postajajo še privlačnejši. Iskreno verjamem, da bi s takšnim in podobnim prepletanjem predmetov med seboj, tudi lažje premostili negativne občutke pri predmetu matematike ali celo navdušili nekoga, ki pred tem za matematiko ni kazal posebnega zanimanja.

Literatura

1. A History of Algorithms, avtor: Jean-Luc Chabert
2. http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?id=L263