BIMATRIČNE IGRE

Poleg matričnih iger z vsoto nič poznamo še matrične igre, katerih vsota ni enaka nič.

1. Splošne matrične igre v strateški obliki

Splošna matrična igra je podana z dvema množicama X in Y čistih strategij igralcev in z dvema realnima funkcijama $u_1(x, y)$ in $u_2(x, y)$, definiranih na $X \times Y$, ki predstavljata plačili za oba igralca. Če prvi (I) izbere $x \in X$ in drugi (II) izbere $y \in Y$, potem I dobi $u_1(x, y)$ in II dobi $u_2(x, y)$.

Končno matrično igro lahko predstavimo z matriko urejenih parov, poimenujemo jo **bimatrika**. Prva komponenta para predstavlja plačilo igralca I, druga komponenta pa predstavlja plačilo igralca II. Matrika ima toliko vrstic, kot ima igralec I čistih strategij in toliko stolpcev, kot ima igralec II čistih strategij. Npr. bimatrika:

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (2,0) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,1) & (5,3) & (3,-2) & (4,4) \\ (0,5) & (-2,3) & (4,1) & (2,2) \end{pmatrix} \tag{1}$$

predstavlja igro, v kateri ima igralec I tri čiste strategije (vrstice) in igralec II štiri čiste strategije (stolpci). Če igralec I izbere vrstico 3 in igralec II stolpec 2, potem I dobi -2 (torej izgubi 2) in igralec II dobi 3.

Eden od načinov, kako opišemo končno matrično igro, je s parom matrik. Če m in n predstavlja število čistih strategij dveh igralcev, lahko igro predstavimo z dvema $m \times n$ matrikama A in B. Interpretiramo tako: če igralec I izbere vrstico i in igralec II izbere stolpec j, potem I dobi a_{ij} in II dobi b_{ij}, kjer sta a_{ij} in b_{ij} elementa v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrik A oz. B. Upoštevati je treba, da B predstavlja **zmage** igralca II in ne izgube, kot je to v primeru za matrične igre z vsoto nič. Igra bimatrike (1) je predstavljena kot (A, B), kjer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Torej, matrična igra ima vsoto nič, če in samo če velja: $B = -A$.

2. Pregled

Analiza matričnih iger je bolj zapletena za splošne matrične igre, kot pa za igre z vsoto nič. Ko vsota plačil ni več enaka nič (ali konstantna), maksimiziranje plačila enega igralca ni več enako minimiziranju plačila drugega. Izrek o minimaksu (izrek pravi: Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ obstajata stohastična vektorja $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ in $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, za katera velja: $\min_y \bar{x}^T A y = \max_x x^T A \bar{y}$, pri čemer max/min teče po vseh stohastičnih vektorjih y oz. x.) ne ustreza bimatričnim igram. Igralec ne more več računati na to, da bo igral optimalno, če bo gledal samo na svojo matriko in delal v nasprotju z najslabšim primerom. Logično je, da mora upoštevati nasprotnikovo matriko in sklepati, katero strategijo bo verjetno uporabil. Tudi drugi igralec mora delati na tak način. Primer za splošne matrične igre torej zahteva drugačen koncept rešitev.

Teorija je v splošnem razdeljena na dve veji, **nekooperativno teorijo** in **kooperativno teorijo**. V nekooperativni teoriji imamo dve možnosti: ali se igralci ne pogovarjajo, predno se odločijo, ali če se pogovarjajo, se ne smejo dogovarjati o strategijah. Glaven koncept nekooperativnih rešitev je *strateško ravnovesje* (razloženo kasneje). V kooperativni teoriji se tekmovalci lahko dogovarjajo, predno se odločijo. Lahko se dogovorijo, da bodo uporabili določene strategije, vendar je tak dogovor lahko narejen pod prisilo (eden prisili drugega, kakšno strategijo naj uporabi).

3. Varen nivo

Edega od konceptov za matrične igre z vsoto nič lahko prenesemo na splošne matrične igre in ta koncept se v splošnih matričnih igrah zelo uporablja. To je **varen nivo** ali znesek, ki ga lahko vsak igralec v povprečju zagotovo dobi. V bimatrični igri z $m \times n$ matrikama A in B lahko igralec I v povprečju zagotovo dobi vsaj:

$$v_I = \max_p \min_j \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} = \mathrm{Val}(A) \qquad (3)$$

To imenujemo **varen nivo igralca I**. (To je po definiciji najmanjša vrednost od A, kar je po izreku o minimaksu tudi največja vrednost A. Torej lahko pišemo $v_I = \mathrm{Val}(A)$). Igralec I lahko doseže to plačilo, brez da bi se oziral na matriko igralca II. Strategija p, ki doseže maksimum v (3), se imenuje **maxmin strategija za igralca I**.

Na isti način dobimo **varen nivo igralca II**, to je:

$$v_{II} = \max_q \min_i \textstyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij} q_j = \mathrm{Val}(B^T) \qquad (4)$$

torej lahko igralec II zagotovo dobi v povprečju ta znesek. Strategija q, ki doseže maksimum v (4), se imenuje **maxmin strategija za igralca II** (v_{II} je vrednost od B^T. To je zato, ker je $\mathrm{Val}(B)$ definirana kot vrednost igre, kjer komponente predstavljajo zmage (dobitke) tistega, ki ima vrstice in izgube tistega, ki ima stolpce.) To bo jasno na primeru:

$$\begin{pmatrix} (2,0) & (1,3) \\ (0,1) & (3,2) \end{pmatrix} \qquad \text{oziroma} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Iz matrike A vidimo, da je za igralca I maxmin strategija $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ in njegov varen nivo je $v_I = \frac{3}{2}$. Pri matriki B vidimo, da je drugi stolpec večji od prvega (to so spet dobički igralca II; radi bi maksimizirali). Za igralca II velja: $v_{II} = 2$ po maxmin strategiji (stolpec 2). To je vrednost od B^T, medtem ko je $\mathrm{Val}(B) = 1$.

Če oba igralca uporabljata maxmin strategijo, potem igralec I dobi samo v_I, medtem ko igralec II dobi $\frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{11}{4}$. To je ugodno za igralca II. Toda če igralec I pogleda matriko B, lahko vidi, da bo igralec II zelo verjetno izbral stolpec 2, ker je stolpec 2 večji od stolpca 1. Potem igralec I dobi 3, kar je večje od v_I in igralec II dobi $v_{II} = 2$.

Plačilo $(3, 2)$ iz druge vrstice in drugega stolpca je bolj stabilno. Če vsak igralec verjame, da bo nasprotnik izbral drugo strategijo, potem bo vsak izbral drugo strategijo. To je eno glavnih stališč teorije nekooperativne igre, kjer se tak strateški par imenuje strateško ravnovesje.

4. Nekooperativne igre

Splošne matrične igre in igre za n-igralcev, kjer je $n > 2$, je težje analizirati in interpretirati kot igre z vsoto nič. "Optimalnost" tu ne obstaja. V nekooperativni teoriji se smatra, da igralci ne morejo očitno sodelovati, da bi dobili višje dobitke. Če je dovoljena komunikacija, potem ne morejo delati povezanih dogovorov. Možno nadomestilo za "rešitev" igre najdemo v strateškem ravnovesju.

Strateško ravnovesje. Končna igra n-igralcev v strateški obliki je dana z n nepraznimi množicami $X_1, X_2, \ldots, X_n$ in z n realnimi funkcijami $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ki so definirane na $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Množica X_i predstavlja množico čistih strategij igralca i in $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predstavlja plačila igralcu i, ko so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izbire čistih strategij igralcev, kjer $x_j \in X_j$ za $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija Vektor čistih strategij $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kjer $x_i \in X_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, se imenuje **čisto strateško ravnovesje** (PSE – pure strategic equilibrium), če za vse $i = 1, 2, \ldots, n$ in za vse $x \in X_i$ velja:

$$u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq u_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{5}$$

Neenakost (5) torej pove, da če ostali igralci izberejo njihove strategije, potem je najboljše za igralca i, da uporabi x_i. Takšna čista strategija za igralca i se imenuje **najboljši odgovor** strategijam drugih igralcev. Ideja strateškega ravnovesja je lahko takšna: določena izbira strategije igralca postane PSE, če vsak igralec uporablja najboljši "odgovor" na strategijo drugega igralca. Kot primer poglejmo primer dveh igralcev:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} (3,3) & (0,0) \\ (0,0) & (5,5) \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} (3,3) & (4,3) \\ (3,4) & (5,5) \end{pmatrix}$$

V primeru (a) je matrika na mestu $\langle 1, 1 \rangle$ strateško ravnovesje s plačilom $(3, 3)$. Če vsak verjame, da bo nasprotnik izbral prvo strategijo, tudi sam ne bo hotel zamenjati svoje strategije. Na mestu $\langle 2, 2 \rangle$ imamo prav tako strateško ravnovesje. Ker je tu plačilo $(5, 5)$, je obema igralcema ljubše to ravnovesje. Pri (b) je $\langle 1, 1 \rangle$ po definiciji ravnovesje. Noben igralec ne more zmagati, če zamenja strategijo. Po drugi strani pa noben igralec ne bo prizadet, če zamenja in če oba zamenjata, bosta oba na boljšem.

Zato je ravnovesje $\langle 1,1 \rangle$ bolj nestabilno.

Primer (a) je iz igre, v kateri igralca dobita isto izplačilo, toda se ne smeta pogovarjati. Če bi se lahko pogovarjala, bi se dogovorila za tako igro, ki da maksimalno izplačilo obema.

Če se igralci v nekooperativni igri lahko pogovarjajo in dosežejo neke neformalne dogovore, lahko pričakujemo, da bo strateško ravnovesje. Vsak igralec maksimizira svoj dobiček glede na strategijo, ki naj bi jo uporabil nasprotnik.

Definicijo razširimo tako, da je igralcem dovoljeno, da uporabijo mešane strategije. Označimo množico možnosti po k točkah s $\mathcal{P}_k$:

$$\mathcal{P}_k = \{p = (p_1, \ldots, p_k) : \ p_i \geq 0 \text{ za } i = 1, \ldots, k \text{ in } \textstyle\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\} \tag{6}$$

Naj m_i označuje število čistih strategij za igralca i, tako da ima množica X_i m_i elementov. Potem je množica mešanih strategij igralca i: $\mathcal{P}_{m_i}$. Označimo jo z X_i^*, torej $X_i^* = \mathcal{P}_{m_i}$.

Označimo sedaj množico elementov X_i s prvimi m_i naravnimi števili, torej: $X_i = \{1, 2, \ldots, m_i\}$. Predpostavimo, da za $i = 1, 2, \ldots, n$ igralec i uporabi $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{im_i}) \in X_i^*$. Potem je povprečno izplačilo za igralca j:

$$g_j(p_1, \ldots, p_n) = \textstyle\sum_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1i_1} \ldots p_{ni_n} u_j(i_1, \ldots, i_n) \tag{7}$$

Iz tega sledi analogna definicija ravnovesja, ki uporablja mešane strategije:

Definicija Vektor mešanih strategij $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, kjer $p_i \in X_i^*$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, se imenuje **strateško ravnovesje** (SE – strategic equilibrium), če za vse $i = 1, 2, \ldots, n$ in za vse $p \in X_i^*$ velja:

$$g_i(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n) \geq g_i(p_1, \ldots, p_{i-1}, p, p_{i+1}, \ldots, p_n) \tag{8}$$

Katerakoli mešana strategija p_i, ki zadošča neenakosti (8), je **najboljši odgovor** igralca i na mešane strategije ostalih igralcev. Določena izbira mešanih strategij igralcev je strateško ravnovesje, če in samo če vsak igralec uporablja najboljši odgovor na strategije drugih igralcev. Noben igralec ne more zmagati, če samo on spreminja strategijo. Čisto strateško ravnovesje (PSE) je poseben primer strateškega ravnovesja (SE).

Ta koncept najboljšega odgovora predstavlja praktičen način igranja igre: *Glede na to, katere različne čiste strategije bo tvoj nasprotnik po tvojem mnenju igral, izberi najboljši odgovor nanje.* To je primer **Bayesovega** poskusa, kako se odločati. Seveda je v igri to lahko nevaren postopek, saj je lahko nasprotnik boljši v tem načinu ugibanja.

Prvo vprašanje, ki se je pojavilo, je bilo: "Ali vedno obstaja strateško ravnovesje?". To vprašanje je leta 1951 rešil John Nash v naslednjem izreku, ki je posplošitev von

Neumanovega izreka o minimaksu. Zaradi tega dosežka se strateško ravnovesje imenuje tudi **Nashevo ravnovesje**.

Izrek Vsaka končna igra n-igralcev v strateški obliki ima vsaj eno strateško ravnovesje.

Ena od težav nekooperativne teorije je ta, da obstaja več ravnovesij, ki dajo različne vektorje dobitkov. Druga težava je, da čeprav obstaja edinstveno strateško ravnovesje, se ne smatra kot primerna rešitev ali predviden rezultat.

Torej na kratko: Nashevo ravnovesje je v teoriji iger niz strategij za igralce, kjer nobeden izmed njih ne more izboljšati svojega položaja oz. poplačila s strategijo, ki jo ponuja drugi igralec.

Primer: **Zapornikova dilema**

Zapornikova dilema je v teoriji iger igra z neničelno vsoto, v kateri nastopata dva igralca, zapornika.

Policija je aretirala dva človeka A in B, ki sta osumljena, da sta skupaj zagrešila rop (zločin) in ju zaprla v ločeni celici. Ni jima dovoljeno, da bi komunicirala drug z drugim. Dejansko sta zločin tudi zagrešila, policija pa tega ne more dokazati. Policija ima dovolj podatkov za 6-mesečno kazen (posedovanje orožja, manjši prekrški), želi pa dokončno zaključiti primer s priznanjem, ki bi vsaj enega za dalj časa poslalo v ječo, vendar bi moral vsaj eden priznati. Oba vesta naslednje:

- Lahko ali priznaš, da si storil zločin, ali pa ne priznaš.
- Če eden od vaju prizna, drugi pa ne, potem je tisti, ki je priznal, izpuščen; tisti, ki pa ni priznal, bo šel v ječo za 10 let.
- Če oba priznata, potem bosta oba šla v ječo za dve leti.
- Če nobeden od vaju ne prizna, potem imamo dovolj podatkov, da dobita oba po 6 mesecev.

Kaj naj storita? Ali se splača izdati drugega?

	B molči	B izda
A molči	$(0.5, 0.5)$	$(10, 0)$
A izda	$(0, 10)$	$(2, 2)$

Vsak želi čim bolj zmanjšati svojo kazen. S stališča posameznika se je bolje izdati, ker je kazen manjša, ne glede na odločitev drugega. Ker pa je tako najbrž razmišljal tudi drugi igralec, se zgodi, da drug drugega obtožita, za kar dobita 2 leti zapora, če pa bi molčala, bi dobila le pol leta. Za oba skupaj bi bilo najugodneje, če bi se dogovorila in molčala, vendar je to lahko tudi nevarno, če kateri od zapornikov ne drži besede in spregovori.