Seminar 1

Verižni ulomki

(4. DEL)

Monika KAČIČNIK

3. letnik

DIOFANTSKE APROKSIMACIJE

Vemo že, da lahko iracionalna števila razvijemo v verižne ulomke, ki niso končni. Če iracionalno število $\alpha \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ razvijemo v verižni ulomek, zaporedje približkov $\{\frac{A_n}{B_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira k α. Radi bi ocenili hitrost te konvergence, zato si ogledamo razliko $\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right|$. Vemo že, da lahko α zapišemo kot

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1}},$$

zato lahko zapišemo

$$\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1}A_n + A_{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}\right| =$$

$$= \left|\frac{\alpha_{n+1}A_nB_n + B_nA_{n-1} - \alpha_{n+1}A_nB_n - A_nB_{n-1}}{(\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1})B_n}\right| = \left|\frac{B_nA_{n-1} - A_nB_{n-1}}{(\alpha_{n+1}B_n + B_{n-1})B_n}\right| =$$

$$= \left|\frac{-(-1)^{n-1}}{\alpha_{n+1}B_n^2 + B_{n-1}B_n}\right| = \frac{1}{\alpha_{n+1}B_n^2 + B_{n-1}B_n} < \frac{1}{B_nB_{n-1}},$$

ker je $\alpha_{n+1}B_n^2 > 0$. Torej smo dobili oceno

$$\left|\alpha - \frac{A_n}{B_n}\right| < \frac{1}{B_nB_{n-1}}.$$

Poskusimo to oceno še izboljšati. Z $\frac{x}{y}$ označimo enega izmed približkov iz zaporedja $\{\frac{A_n}{B_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$. Potem velja

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}.$$

Ta ocena je rezultat diofantske aproksimacije - veje v matematiki, ki se ukvarja z racionalnimi približki za iracionalna števila.

Zgled 1: Oglejmo si število $\sqrt{2}$. Njegov verižni ulomek je enak

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots,$$

približki pa so

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots .$$

Dobimo ocene:

$$\left|\sqrt{2}-\tfrac{3}{2}\right| = 0,086 < \tfrac{1}{4},$$
$$\left|\sqrt{2}-\tfrac{7}{5}\right| = 0,014 < \tfrac{1}{25},$$
$$\left|\sqrt{2}-\tfrac{17}{12}\right| = 0,002 < \tfrac{1}{144} \doteq 0,0069.$$

To oceno lahko izboljšamo, tako da še vedno velja za neskončno približkov, vendar pa ne nujno za vsak približek. Tako za vsaj enega izmed dveh zaporednih približkov velja ocena

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2y^2}.$$

Zgled 2: Verižni ulomek števila $\sqrt{3}$ je enak

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots,$$

približki pa so

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \ldots .$$

Dobimo ocene:

$$\left|\sqrt{3}-\tfrac{2}{1}\right| = 0,27 < \tfrac{1}{2},$$
$$\left|\sqrt{3}-\tfrac{5}{3}\right| = 0,065 > \tfrac{1}{18} \doteq 0,056,$$
$$\left|\sqrt{3}-\tfrac{7}{4}\right| = 0,018 < \tfrac{1}{32} \doteq 0,031,$$
$$\left|\sqrt{3}-\tfrac{19}{11}\right| = 0,0048 > \tfrac{1}{242} \doteq 0,0041.$$

Še boljša ocena, ki ji zadošča vsaj eden izmed treh zaporednih približkov in jo je prvi dokazal Hurwitz ob koncu 19. stoletja, je

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}y^2}.$$

Zgled 3: Iz zgleda 2 vemo, da je verižni ulomek števila $\sqrt{3}$ enak

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots,$$

približki pa so

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11} \dots .$$

Dobimo ocene:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{3} - \tfrac{1}{1}\right| &= 0,73 > \tfrac{1}{\sqrt{5}} \doteq 0,45, \\
\left|\sqrt{3} - \tfrac{2}{1}\right| &= 0,27 < \tfrac{1}{\sqrt{5}} \doteq 0,45, \\
\left|\sqrt{3} - \tfrac{5}{3}\right| &= 0,065 > \tfrac{1}{9\sqrt{5}} \doteq 0,0497, \\
\left|\sqrt{3} - \tfrac{7}{4}\right| &= 0,018 < \tfrac{1}{16\sqrt{5}} \doteq 0,028, \\
\left|\sqrt{3} - \tfrac{19}{11}\right| &= 0,005 > \tfrac{1}{121\sqrt{5}} \doteq 0,004.
\end{aligned}$$

Boljše ocene, ki bi ji zadoščalo neskončno približov za vsako iracionalno število, žal ne moremo najti, obstajajo pa iracionalna števila, za katera velja, da oceni

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{ky^2}, \qquad k > \sqrt{5},$$

zadošča le končno približkov.

Zgled 4: Najpreprostejši primer za to oceno je

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} .$$

Prava vrednost tega verižnega ulomka zadošča enačbi

$$\alpha = 1 + \tfrac{1}{\alpha} \qquad \text{oz.} \qquad \alpha^2 - \alpha - 1 = 0.$$

Upoštevamo samo pozitivno rešitev te enačbe, zato je rešitev enolična in je $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

KVADRATNI IRACIONALI

Najpreprostejši in najbolj znani primeri iracionalnih števil so kvadratni iracionali.

Definicija: *Kvadratni iracionali so števila iz* $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$*, ki jih dobimo kot rešitve kvadratnih enačb ene spremenljivke s celimi koeficienti.*

V posebnem so to koreni iz kateregakoli naravnega števila, ki ni popoln kvadrat, saj so rešitve enačbe $x^2 - N = 0$. Oglejmo si nekaj lastnosti verižnih ulomkov kvadratnih iracionalov.

1. Razvijmo $\alpha = \sqrt{2}$ v verižni ulomek.
Ker je celi del $\sqrt{2}$ enak 1, dobimo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

in izrazimo

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Ker je $[\alpha_1] = 2$, v drugem koraku dobimo

$$\alpha_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

in izrazimo

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Vemo, da je računanje naslednjega popolnega kvocienta odvisno le od zadnjega izračunanega popolnega kvocienta in ker je $\alpha_2 = \alpha_1$, so tudi vsi nadaljni popolni kvocienti α_n enaki α_1. Zato lahko zapišemo

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\dots .$$

Še nekaj primerov:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\dots ,$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\dots ,$$

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\dots .$$

2. Oglejmo si sedaj še razvoj števila

$$\alpha = \frac{24-\sqrt{15}}{17}.$$

Vrednost $\sqrt{15}$ je med 3 in 4, zato je $[\alpha] = 1$. Torej je

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

in izrazimo

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{17}{7-\sqrt{15}} = \frac{7+\sqrt{15}}{2}.$$

Ker je $[\alpha_1] = 5$, v drugem koraku dobimo

$$\alpha_1 = 5 + \frac{1}{\alpha_2}$$

in izrazimo

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 5} = \frac{2}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{3}.$$

Ker je $[\alpha_2] = 2$, v tretjem koraku dobimo

$$\alpha_2 = 2 + \frac{1}{\alpha_3}$$

in izrazimo

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - 2} = \frac{3}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{2}.$$

Ker je $[\alpha_3] = 3$, v četrtem koraku dobimo

$$\alpha_3 = 3 + \frac{1}{\alpha_4}$$

in izrazimo

$$\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - 3} = \frac{2}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{3}.$$

Vidimo, da je $\alpha_4 = \alpha_2$, torej je tudi $\alpha_5 = \alpha_3$, saj je α_5 odvisen le od α_4. Tretji in četrti korak se zato ponavljata in verižni ulomek je

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = 1 + \frac{1}{5+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\dots .$$

Zapis verižnih ulomkov lahko tudi skrajšamo, tako da celi del števila ločimo od ostalega s podpičjem, med ostalimi členi pišemo vejico in periodo označimo s črto zgoraj. Tako lahko zapišemo

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = 1; 5, \overline{2, 3}\ ,$$

krajši zapis prejšnjih primerov pa je

$$\sqrt{2} = 1; \overline{2}\ , \quad \sqrt{3} = 1; \overline{1, 2}\ , \quad \sqrt{5} = 2; \overline{4}\ , \quad \sqrt{6} = 2; \overline{2, 4}\ .$$

V vseh primerih smo opazili, da so verižni ulomki kvadratnih iracionalov periodični in v splošnem nam to zagotavlja izrek, ki ga je prvi dokazal Lagrange leta 1770.

Lagrange-ov izrek: *Vsakemu kvadratnemu iracionalu pripada enolično določen verižni ulomek, ki je periodičen od nekega člena naprej.*

POPOLNOMA PERIODIČNI VERIŽNI ULOMKI

Definicija: *Verižni ulomek* $\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\cdots\frac{1}{q_n+}\frac{1}{\alpha}$ *je popolnoma periodičen, če je njegova perioda enaka* $q_0, q_1, q_2, ..., q_n$.

Noben primer, ki smo ga prej obravnavali, ni bil popolnoma periodičen, kljub temu pa lahko enostavno najdemo primere popolnoma periodičnih verižnih ulomkov. Na primer, če $\sqrt{2}$ prištejemo 1, je verižni ulomek tega števila popolnoma periodičen:

$$\sqrt{2}+1 = 2 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots, \qquad \text{oz.} \qquad \sqrt{2}+1 = 2;\overline{2}\,.$$

Podobno lahko naredimo tudi za $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ in $\sqrt{6}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}+1 &= 2 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots = 2;\overline{1,2}\,,\\ \sqrt{5}+2 &= 4 + \frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\frac{1}{4+}\cdots = 4;\overline{4}\,,\\ \sqrt{6}+2 &= 4 + \frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots = 4;\overline{2,4}\,.\end{aligned}$$

Števila, ki so predstavljiva s popolnoma periodičnimi verižnimi ulomki, so posebni primeri kvadratnih iracionalov, zato bomo poskusili ugotoviti kakšne lastnosti imajo.
Vzemimo

$$\alpha = 4 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}} = 4 + \frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\cdots = 4;\overline{1,3,4}\,.$$

Vidimo, da je α popolnoma periodičen verižni ulomek, zato ga lahko zapišemo kot

$$\alpha = 4 + \frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{\alpha}\,,$$

približki pa so

$$\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{19}{4}, \frac{18\alpha+5}{4\alpha+1}.$$

Vemo, da je zadnji približek enak α, t.j. $\frac{18\alpha+5}{4\alpha+1} = \alpha$, zato dobimo kvadratno enačbo

$$4\alpha^2 - 18\alpha - 5 = 0, \qquad (1)$$

iz katere lahko α izračunamo. Ker ima prosti člen negativni predznak, sta rešitvi te enačbe nasprotno predznačeni. Upoštevamo le pozitivno rešitev in zato je α enolično določen.

Z β označimo število, ki ima periodo sestavljeno iz enakih števil kot α, vendar v obratnem vrstnem redu. Torej

$$\beta = 3 + \frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots \qquad \text{oz.} \qquad \beta = 3 + \frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{\beta}$$

Približki za β so:

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{19}{5}, \frac{19\beta+4}{5\beta+1}.$$

Upoštevamo, da je $\frac{19\beta+4}{5\beta+1} = \beta$ torej dobimo kvadratno enačbo

$$5\beta^2 - 18\beta - 4 = 0. \qquad (2)$$

Poglejmo si povezavo med rešitvami enačb (1) in (2). Ker β ni enak nič, lahko enačbo (2) pomnožimo z $-\frac{1}{\beta^2}$. Dobimo enačbo

$$-5 + \frac{18}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} = 0.$$

Če v tej enačbi pišemo $-\frac{1}{\beta} = \alpha'$, dobimo enačbo, ki ji zadošča α iz enačbe (1):

$$-5 - 18\alpha' + 4\alpha'^2 = 0 \qquad \text{oz.} \qquad 4\alpha'^2 - 18\alpha' - 5 = 0$$

Torej je tudi $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$ rešitev enačbe (1). Ker je β pozitivna rešitev enačbe (2), je $-\frac{1}{\beta}$ negativna rešitev enačbe (1). Števili α in $-\frac{1}{\beta}$ sta rešitvi iste enačbe, ki v obsegu racionalnih števil ni razcepna, zato ju imenujemo *konjugirani algebraični števili.*