UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO
ODDELEK ZA MATEMATIKO IN MEHANIKO

Matematika - uporabna smer

Marko Koselj

VSOTE BINOMSKIH KOEFICIENTOV

Diplomska naloga

Ljubljana, 1995

Kazalo

PROGRAM DIPLOMSKE NALOGE

V nalogi opišite Gosperjev in Zeilbergerjev algoritem za iskanje rekurzivnih relacij, ki jim zadoščajo hipergeometrične vsote. Poiščite nekaj zanimivih primerov in jih rešite s paketom `zb_alg.m`.

LITERATURA:

R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2. izdaja, Addison-Wesley, 1994

Ljubljana, januar 1995

POVZETEK

V uvodu opredelimo hipergeometrijski člen, pravi hipergeometrijski člen in odnos med njima. V nadaljevanju opišemo, kako lahko podobno kot integrale izračunamo vsote s pomočjo nedoločenega in določenega seštevanja. V jedru pa opišemo Gosperjev in Zeilbergerjev algoritem, ki vsoti, katere sumand je pravi hipergeometrijski člen, poiščeta rekurzijo, ki ji vsota zadošča.

Math. Subj. Class. (1991): 05A19,
40–04

KEY WORDS : *hypergeometric term, indefinite summation, definite summation, Gosper's algorithm, Zeilberger's algorithm*

1. Uvod

Dobro nam je znano, kako seštejemo prvih n členov aritmetičnega ali geometrijskega zaporedja. Tudi binomsko formulo dobro poznamo. Mnogokrat pa želimo izračunati vsote, v katerih je sumand mnogo bolj zapletene oblike, npr. produkt nekaj binomskih koeficientov z raznimi parametri. V diplomski nalogi bomo tako, kot je opisano v [2], spoznali, kako rešujemo take vrste nalog. Najprej vpeljimo nekaj oznak in pojmov, natančneje navedimo, kakšne vsote bomo obravnavali, in povejmo, s kakšnimi metodami jih izračunavamo.

Oznako za fakulteto imejmo definirano splošneje s pomočjo gama funkcije, torej $x! = \Gamma(x+1)$.

Naj bodo $f(k)$ kompleksna števila, definirana pri vsakem k, ki nastopa v vsoti, l in m pa celi števili, $l \leq m$. Naj bo

$$\sum_{k=l}^{m} f(k) = f(l) + f(l+1) + f(l+2) + \cdots + f(m) \tag{1.1}$$

in

$$\sum_{k} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \cdots + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + \cdots \,. \tag{1.2}$$

Obravnavali bomo le vsote, v katerih je le končno mnogo neničelnih členov. Zato sta oznaki vsote v (1.2) dobro definirani.

Definicija 1.1 *Neničelno zaporedje $t \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ je* **hipergeometrijski člen** *oziroma* **hipergeometrijsko***, če obstaja racionalna funkcija $\varrho(x) \in \mathbb{C}(x)$, da za vsak $k \in \mathbb{Z}$, pri katerem je $\varrho(k) \in \mathbb{C}$, velja $t(k+1) = \varrho(k)t(k)$.*

Definicija 1.2 *Neničelno zaporedje $t \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ je* **hipergeometrijski člen dveh spremenljivk***, če obstajata racionalni funkciji $\varrho_1(x,y)$, $\varrho_2(x,y) \in \mathbb{C}(x,y)$, da je zadoščeno pogojema:*

- *za vsaka n, $k \in \mathbb{Z}$, pri katerima je $\varrho_1(n,k) \in \mathbb{C}$, velja $t(n,k+1) = \varrho_1(n,k)t(n,k)$,*
- *za vsaka n, $k \in \mathbb{Z}$, pri katerima je $\varrho_2(n,k) \in \mathbb{C}$, velja $t(n+1,k) = \varrho_2(n,k)t(n,k)$.*

Definicija 1.3 *Zaporedje* $t \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ *je* **pravi hipergeometrijski člen**, *če je oblike*

$$t(n,k) = f(n,k)\,\frac{(a_1n + a_1'k + a_1'')!\ldots(a_pn + a_p'k + a_p'')!\,z^k}{(b_1n + b_1'k + b_1'')!\ldots(b_qn + b_q'k + b_q'')!}\,.$$

Pri tem je $f(n,k)$ *polinom v* n *in* k, *koeficienti* a_1, a_1', $\ldots$, a_p, a_p', b_1, b_1', $\ldots$, b_q, b_q' *so določena cela števila in parameter* z *je neničeln. Ostale količine* a_1'', $\ldots$, a_p'', b_1'', $\ldots$, b_q'' *so poljubna kompleksna števila ali parametri.*

Definicija 1.4 *Hipergeometrijska člena* **sta si podobna**, *če je njun kvocient racionalna funkcija.*

K definicijam dodajmo nekaj pripomb:

- Denimo, da imamo hipergeometrijski člen $t(k)$ s pripadajočo racionalno funkcijo $\varrho(k)$. Potem lahko števec in imenovalec racionalne funkcije $\varrho(k)$ razcepimo v obsegu kompleksnih števil:

$$\varrho(k) = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\ldots(k+a_m)\,z}{(k+b_1)(k+b_2)\ldots(k+b_n)}\,. \tag{1.3}$$

  Vidimo, da $t(k)$ lahko zapišemo v obliki

$$t(k) = \frac{c\cdot(k+a_1-1)!(k+a_2-1)!\ldots(k+a_m-1)!\,z^k}{(k+b_1-1)!(k+b_2-1)!\ldots(k+b_n-1)!}\,, \tag{1.4}$$

  kjer je c poljubna neničelna konstanta. Mislimo si, da je definicija pravega hipergeometrijskega člena za zaporedja ene spremenljivke enaka definiciji 1.3, le da v njej parameter n ne nastopa. Potem lahko trdimo, da je zaporedje $t \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $t \neq 0$ pravi hipergeometrijski člen natanko tedaj, ko je hipergeometrijski člen.

- Vsak neničelni pravi hipergeometrijski člen je tudi hipergeometrijski člen dveh spremenljivk. Obrat ne velja. Npr. funkcija $t(n,k) = 1/(nk+1)$ je hipergeometrijski člen dveh spremenljivk, ni pa pravi hipergeometrijski člen.

- Hipergeometrijske člene lahko zapišemo v strnjeni obliki (1.4). Zato tem zaporedjem pogosto pravimo, da se jih da zapisati v **zaključeni obliki**. Tudi linearne kombinacije hipergeometrijskih členov še lahko zapišemo v dokaj strnjeni obliki, zato pogosto uporabljamo isti izraz tudi zanje.

- Podobnost hipergeometrijskih členov je ekvivalenčna relacija.

Vsote, ki jih bomo obravnavali, bodo naslednjih oblik:

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} t(n,k) \ , \qquad s(n) = \sum_{k=\alpha n+\beta}^{\infty} t(n,k) \ , \\ s(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\gamma n+\delta} t(n,k) \ , \qquad s(n) = \sum_{k=\alpha n+\beta}^{\gamma n+\delta} t(n,k) \ . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pri tem je $t(n,k)$ pravi hipergeometrijski člen, α, β, γ in δ pa so cela števila. Poleg tega morata biti α in γ določeni števili in $\gamma > \alpha$. Take vsote so dokaj splošne, saj pravi hipergeometrijski člen zajema vsa polinomska zaporedja, velik del racionalnih zaporedij in velik del produktov binomskih koeficientov.

Naša želja je, da bi vsote $s(n)$ izrazili v zaključeni obliki. Poznamo več poti, po katerih lahko te vrste nalog uženemo:

1. Zapišemo nekaj prvih členov vsote $s(n)$, od tod uganemo splošno formulo zaporedja $s(n)$ in jo s popolno indukcijo dokažemo.

2. Če pričakujemo, da ima zaporedje $s(n)$ neko določeno obliko, ga zapišemo v tej obliki z nekimi še nedoločenimi konstantami. Konstante določimo iz sistema enačb, ki ga dobimo, če v splošno obliko vstavimo začetne vrednosti.

3. Vsoto perturbiramo in včasih se nam posreči, da jo izrazimo z vsotami, ki jih že poznamo.

4. Včasih lahko najdemo bijekcijo med množico objektov, ki jih vsota prešteva, in neko drugo množico, katere moč poznamo.

5. Podobno, kot v analizi lahko računamo z odvodi, nedoločenimi integrali in določenimi integrali, lahko v diskretni matematiki računamo vsote s pomočjo tehnike, ki uporablja diferenčni operator, nedoločene vsote in določene vsote. To bomo spoznali v razdelku 1.1. Gosper je odkril način, kako vsakemu hipergeometrijskemu členu lahko poiščemo nedoločeno vsoto, če je tudi ta hipergeometrijski člen. Ta postopek bomo opisali v razdelku 2.

6. Vsote lahko na enoten način zapišemo v obliki takoimenovane hipergeometrijske vrste. Če zberemo vse znane identitete, v katerih je posamezna hipergeometrijska vrsta izražena v zaključeni obliki, lahko v tej zbirki vsaki vsoti poiščemo zaključeno obliko, če obstaja in je znana.

7. Zaporedju $s(n)$ poiščemo diferenčno enačbo, ki ji zaporedje zadošča, in jo z upoštevanjem začetnih pogojev rešimo. Včasih diferenčno enačbo zlahka poiščemo in tudi rešimo, včasih pa ne. Zeilberger [5] pa je iznašel način, kako zaporedjem $s(n)$, ki nastopajo v (1.5), vedno lahko poiščemo linearno rekurzijo s polinomskimi koeficienti, ki ji $s(n)$ zadošča (Opisali ga bomo v razdelku 3.). Marko Petkovšek [4] je podal algoritem Hyper, ki poišče vsa hipergeometrijska zaporedja, ki zadoščajo taki rekurziji. Če sestavimo Zeilbergerjev algoritem, Hyper in postopek, ki reši sistem enačb, dobimo algoritem, ki vsoto (1.5), kadar je to mogoče, zapiše kot linearno kombinacijo hipergeometrijskih členov.

1.1. Nedoločeno seštevanje in določeno seštevanje

Definicija 1.5 **Diferenčni operator** Δ *je operator, ki preslika kompleksno zaporedje v kompleksno zaporedje na naslednji način:*

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) \ .$$

Definicija 1.6 **Operator premika** E *je operator, ki preslika kompleksno zaporedje v kompleksno zaporedje po predpisu* $Ef(k) = f(k+1)$.

Definicija 1.7 *S simbolom* $\sum g(k)\delta k$ *označimo* **nedoločeno vsoto** *zaporedja* g. *To je množica zaporedij, katerih diferenca je enaka* g. *Zaporedja te množice se med seboj razlikujejo za konstantno zaporedje. To zapišemo:*

$$\sum g(k)\delta k = f(k) + C \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ \Delta f(k) = g(k) \ .$$

Definicija 1.8 *Naj bosta* a *in* b *celi števili,* $a < b$. *S simbolom* $\sum_a^b g(k)\delta k$ *označimo* **določeno vsoto** *zaporedja* g *v mejah od* a *do* b. *Definiramo jo s predpisom:*

$$\sum\nolimits_a^b g(k)\delta k = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) \ .$$

V primeru, ko je $a = b$, *naj bo* $\sum_a^a g(k)\delta k = 0$. *Če pa je* $b < a$, *naj bo*

$$\sum\nolimits_a^b g(k)\delta k = -\sum\nolimits_b^a g(k)\delta k \ .$$

Tako definirani pojmi nam omogočajo postaviti trditev, ki je analogna osnovnemu izreku analize (Newton-Leibnitzovi formuli):

Trditev 1.1 *Če je $g(k) = \Delta f(k)$, potem je*

$$\sum\nolimits_a^b g(k)\delta k = f(k)\Big|_a^b = f(b) - f(a) \ .$$

Dokaz: Naj bo $a < b$. Potem je

$$\sum\nolimits_a^b g(k)\delta k = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{k=a}^{b-1}(f(k+1) - f(k)) = f(b) - f(a) \ .$$

Naj bo $a = b$. Potem je

$$\sum\nolimits_a^a g(k)\delta k = 0 = f(a) - f(a) \ .$$

Naj bo $a > b$. Potem je

$$\sum\nolimits_a^b g(k)\delta k = -\sum\nolimits_b^a g(k)\delta k = -\sum_{k=b}^{a-1}(f(k+1)-f(k)) = -(f(a)-f(b)) = f(b)-f(a).$$

□

Velja tudi nekaj ostalih trditev, ki so analogne pravilom za integriranje.

Trditev 1.2

$$\sum\nolimits_a^b g(k)\delta k + \sum\nolimits_b^c g(k)\delta k = \sum\nolimits_a^c g(k)\delta k \ .$$

Dokaz sledi neposredno iz definicije 1.8. □

Trditev 1.3 *Seštevanje po delih je analogno integraciji per partes:*

$$\sum u(k)\Delta v(k)\delta k = u(k)v(k) - \sum Ev(k)\Delta u(k)\delta k \ .$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\Delta(u(k)v(k)) &= u(k+1)v(k+1) - u(k)v(k) \\
&= u(k+1)v(k+1) - u(k)v(k+1) + u(k)v(k+1) - u(k)v(k) \\
&= u(k)\Delta v(k) + v(k+1)\Delta u(k) \\
&= u(k)\Delta v(k) + Ev(k)\Delta u(k)\ .
\end{aligned}$$

Trditev dobimo, če izenačimo nedoločeni vsoti obeh strani zgornje identitete. □
Kot pri integralih lahko na vse tri člene postavimo meje, da nedoločene vsote postanejo določene.

Primer 1.1 Izračunajmo $s(n) = \sum_{k=1}^{n} kz^k$. Vsoto $s(n)$ izrazimo kot določeno vsoto in uporabimo trditev 1.1:

$$s(n) = \sum\nolimits_1^{n+1} kz^k \delta k = \left(\sum kz^k \delta k\right)\Big|_1^{n+1}\ .$$

Da bi s pomočjo seštevanja po delih izračunali nedoločeno vsoto $\sum kz^k\delta k$, izberimo $u(k) = k$ in $v(k) = z^k/(z-1)$. Torej je $\Delta u(k) = 1$, $\Delta v(k) = z^k$, $Ev(k) = z^{k+1}/(z-1)$ in je

$$\begin{aligned}
\sum kz^k \delta k &= k \cdot \frac{z^k}{z-1} - \sum \frac{z^{k+1}}{z-1}\delta k \\
&= \frac{kz^k}{z-1} - \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2} + C\ .
\end{aligned}$$

Od tod dobimo rešitev

$$s(n) = \frac{(n+1)z^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+2}}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(z-1)^2}\ .$$

Vsa pravila za računanje vsot pa nam nič ne koristijo, če zaporedjem ne znamo poiskati nedoločenih vsot. Udobno bi bilo, če bi bil analogno pravilu $(x^n)' = nx^{n-1}$ tudi $\Delta(k^n)$ enostaven izraz. Pa ni. Toda pomagamo si lahko s padajočimi potencami.

Definicija 1.9 *Izraz* $x^{\underline{m}}$ *imenujemo* **padajoča potenca** *in beremo „x na m padajoč". Definirajmo:*

$$\begin{aligned}
&x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m \text{ faktorjev}}\ , && m \in \mathbb{Z},\ m > 0\ ; \\
&x^{\underline{0}} = 1\ ; && \\
&x^{\underline{-m}} = \tfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}\ , && m \in \mathbb{Z},\ m > 0\ .
\end{aligned}$$

Sedaj pa lahko postavimo trditev, ki je analogna pravilu $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)+C$.

Trditev 1.4

$$\sum k^{\underline{n}} \delta k = \frac{k^{\underline{n+1}}}{n+1} + C \ , \ \text{če je } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1.$$

Dokaz: Naj bo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\Delta(k^{\underline{n}}) = (k+1)^{\underline{n}} - k^{\underline{n}} &= (k+1)k\dots(k-n+2) - k(k-1)\dots(k-n+1) \\
&= k(k-1)\dots(k-n+2)\cdot((k+1)-(k-n+1)) \\
&= n\cdot k(k-1)\dots(k-n+2) \\
&= nk^{\underline{n-1}}\ .
\end{aligned}$$

Torej je $\Delta(k^{\underline{n+1}}/(n+1)) = k^{\underline{n}}$.
Naj bo $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ in $n = -m$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\Delta(k^{\underline{n}}) = \Delta(k^{\underline{-m}}) &= \frac{1}{(k+2)(k+3)\dots(k+m+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+m)} \\
&= \frac{(k+1)-(k+m+1)}{(k+1)(k+2)\dots(k+m+1)} \\
&= -m\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+m+1)} \\
&= -mk^{\underline{-m-1}} = nk^{\underline{n-1}}\ .
\end{aligned}$$

Torej tudi pri negativnem n velja $\Delta(k^{\underline{n+1}}/(n+1)) = k^{\underline{n}}$, če le $n \neq -1$. □

V tabeli 1.1 predstavimo poleg znanih še nekaj ostalih pravil za nedoločeno seštevanje, ki jih lahko hitro pridelamo in jih najpogosteje uporabljamo.

Pravilo iz trditve 1.4 nam omogoča, da poiščemo nedoločene vsote vseh polinomskih zaporedij. Vsak polinom namreč lahko zapišemo kot linearno kombinacijo padajočih potenc. V tabeli 1.1 in primeru 1.1 vidimo, da znamo poiskati nedoločeno vsoto tudi geometrijskemu zaporedju. V razdelku 2 pa si oglejmo, kako je z nedoločenim seštevanjem v splošnem.

$f=\sum g$	$\Delta f = g$	$f=\sum g$	$\Delta f = g$
$k^{\underline{m}}$	$mk^{\underline{m-1}}$		
$k^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$k^{\underline{m}}$	cf	$c\Delta f$
c^k	$(c-1)c^k$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
$c^k/(c-1)$	c^k	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$
$(-1)^k\binom{m}{k}$	$(-1)^{k+1}\binom{m+1}{k+1}$	$\binom{k}{m}$	$\binom{k}{m-1}$
$(-1)^{k-1}\binom{m-1}{k-1}$	$(-1)^k\binom{m}{k}$	$\binom{k}{m+1}$	$\binom{k}{m}$

Tabela 1.1: Diference oziroma nedoločene vsote

2. Gosperjev algoritem

Naj bo $t(k)$ hipergeometrijski člen in $\sum t(k)\delta k = T(k) + C$. Leta 1977 je R. W. Gosper odkril algoritem, ki odloči, ali je tudi nedoločena vsota $T(k)$ hipergeometrijski člen. V primeru, da je, jo algoritem tudi najde.

Hipergeometrijskemu zaporedju $t(k)$ pripadajočo racionalno funkcijo $\varrho(k) = t(k+1)/t(k)$ razcepimo v linearne faktorje kot v (1.3). Prvi korak v Gosperjevem algoritmu je izraziti $\varrho(k)$ v normalni obliki

$$\varrho(k) = \frac{p(k+1)}{p(k)}\,\frac{q(k)}{r(k+1)}\ . \tag{2.1}$$

Pri tem so p, q in r polinomi, ki zadoščajo pogoju:

$$(k+\alpha)|q(k) \text{ in } (k+\beta)|r(k) \Longrightarrow \alpha-\beta \text{ ni pozitivno celo število.} \tag{2.2}$$

Ta pogoj je lahko zadovoljiti: Začasno postavimo $p(k) = 1$, medtem ko $q(k)$ in $r(k+1)$ izenačimo s števcem oziroma imenovalcem racionalne funkcije $\varrho(k)$. Na primer, če ima $t(k)$ obliko (1.4), začnemo s $q(k) = (k+a_1)(k+a_2)\ldots(k+a_m)z$ in $r(k) = (k+b_1-1)(k+b_2-1)\ldots(k+b_n-1)$. Potem preverimo, če je pogoju (2.2) zadoščeno. Če q vsebuje faktor $(k+\alpha)$ in r vsebuje faktor $(k+\beta)$, kjer je $\alpha-\beta = N > 0$, potem iz q in r ta faktorja izločimo, $p(k)$ pa nadomestimo s

$$p(k)(k+\alpha-1)^{\underline{N-1}} = p(k)(k+\alpha-1)(k+\alpha-2)\ldots(k+\beta+1)\ .$$

Novi p, q in r še vedno ustrezajo enakosti (2.1), ta postopek pa lahko ponavljamo, dokler ni zadoščeno pogoju (2.2).

Naš cilj je poiskati hipergeometrijski člen $T(k)$, da bo

$$t(k) = T(k+1) - T(k) \ . \tag{2.3}$$

Pišimo

$$T(k) = \frac{r(k)s(k)t(k)}{p(k)} \ , \tag{2.4}$$

kjer je $s(k)$ neznana funkcija, ki jo moramo nekako odkriti. Če vstavimo (2.4) v (2.1) in (2.3), dobimo enačbo, ki ji $s(k)$ mora zadostiti:

$$p(k) = q(k)s(k+1) - r(k)s(k) \ . \tag{2.5}$$

Če najdemo $s(k)$, ki zadošča tej rekurziji, smo našli $\sum t(k)\delta k$.

Predpostavljamo, da je $T(k+1)/T(k)$ racionalna funkcija k-ja. Zato je po (2.4) in (2.3) tudi $r(k)s(k)/p(k) = T(k)/(T(k+1) - T(k))$ racionalna funkcija k-ja in mora biti tudi $s(k)$ kvocient polinomov:

$$s(k) = f(k)/g(k) \ . \tag{2.6}$$

Toda dejansko lahko dokažemo, da je $s(k)$ polinom. Kajti če $g(k) \neq 1$ ter $f(k)$ in $g(k)$ nimata skupnih faktorjev, naj bo N največje celo število tako, da se $(k+\beta)$ in $(k+\beta+N-1)$ oba pojavljata kot faktorja v $g(k)$ pri nekem kompleksnem številu β. N ima pozitivno vrednost, ker $N = 1$ vedno zadovoljuje ta pogoj. Enačbo (2.5) lahko zapišemo

$$p(k)g(k+1)g(k) = q(k)f(k+1)g(k) - r(k)g(k+1)f(k) \ ,$$

in če vstavimo $k = -\beta$ ter $k = -\beta - N$, dobimo

$$r(-\beta)g(1-\beta)f(-\beta) = 0 = q(-\beta-N)f(1-\beta-N)g(-\beta-N) \ .$$

$f(-\beta) \neq 0$ in $f(1-\beta-N) \neq 0$, ker f in g nimata skupnih korenov. Tudi $g(1-\beta) \neq 0$ in $g(-\beta-N) \neq 0$, ker bi sicer $g(k)$ vseboval faktor $(k+\beta-1)$ ali $(k+\beta+N)$, kar pa je v nasprotju z maksimalnostjo N-ja. Torej

$$r(-\beta) = q(-\beta-N) = 0 \ .$$

To pa je v nasprotju s pogojem (2.2). Torej $s(k)$ mora biti polinom.

Preostala nam je naloga, da pri danih polinomih $p(k)$, $q(k)$ in $r(k)$ odločimo, ali obstaja polinom $s(k)$, ki zadovoljuje (2.5). To je lahko storiti za polinome določene stopnje d. Lahko namreč zapišemo

$$s(k) = \alpha_d k^d + \alpha_{d-1} k^{d-1} + \cdots + \alpha_0 \ , \qquad \alpha_d \neq 0$$

z neznanimi koeficienti $(\alpha_d, \ldots, \alpha_0)$ in vstavimo ta izraz v enačbo. Polinom $s(k)$ zadošča rekurziji natanko tedaj, ko koeficienti α_i zadoščajo določenim linearnim enačbam, ker mora v (2.5) vsaka potenca k-ja imeti isti koeficient na obeh straneh.

Kako določimo stopnjo polinoma s? Izkaže se, da sta kvečjemu dve možnosti. Enakost (2.5) lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} &2p(k) = Q(k)(s(k+1) + s(k)) + R(k)(s(k+1) - s(k)) \ , \\ &\text{kjer je } Q(k) = q(k) - r(k) \text{ in } R(k) = q(k) + r(k) \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Če ima $s(k)$ stopnjo d, potem ima vsota $s(k+1)+s(k) = 2\alpha_d k^d + \cdots$ tudi stopnjo d, medtem ko ima razlika $s(k+1) - s(k) = d\alpha_d k^{d-1} + \cdots$ stopnjo $d-1$. (Privzamemo lahko, da ima ničelni polinom stopnjo -1.) Pišimo $deg(p)$ za stopnjo polinoma p. Če je $deg(Q) \geq deg(R)$, potem je stopnja desne strani v (2.7) $deg(Q) + d$ in mora biti $d = deg(p) - deg(Q)$. Če pa je $deg(Q) < deg(R) = d'$, lahko zapišemo $Q(k) = l' k^{d'-1} + \cdots$ in $R(k) = l k^{d'} + \cdots$, kjer $l \neq 0$. Desna stran enačbe (2.7) ima obliko

$$(2l'\alpha_d + ld\alpha_d)k^{d+d'-1} + \cdots \ .$$

Torej imamo dve možnosti: ali je $2l' + ld \neq 0$ in $d = deg(p) - deg(R) + 1$ ali pa je $2l' + ld = 0$ in $d > deg(p) - deg(R) + 1$. To drugo možnost je treba raziskati le v primeru, ko je $-2l'/l$ celo število d, večje od $deg(p) - deg(R) + 1$. Izpustili smo le še poseben primer $Q(k) = 0$, $deg(R) = 0$. No, v tem primeru iz (2.7) dobimo $deg(p) = d - 1$, torej je $d = deg(p) + 1$.

Sedaj imamo dovolj dejstev, da odločimo, ali obstaja primeren polinom $s(k)$. Če obstaja, ga lahko vstavimo v (2.4) in dobimo iskano nedoločeno vsoto $T(k)$. Če pa ne obstaja, smo dokazali, da $\sum t(k)\delta k$ ni hipergeometrijski člen.

Primer 2.1 Z Gosperjevim algoritmom izračunajmo

$$\sum \binom{n}{k} (-1)^k \delta k$$

pri poljubnem fiksiranem n. Splošni člen zaporedja je

$$t(k) = \binom{n}{k} (-1)^k \ .$$

Poiščimo pripadajočo racionalno funkcijo in jo izrazimo v normalni obliki (2.1):

$$\frac{t(k+1)}{t(k)} = \frac{(k-n)}{(k+1)} = \frac{p(k+1)q(k)}{p(k)r(k+1)} \; .$$

Predpostavimo, da n ni negativno celo število. Potem enostavno vzamemo $p(k) = 1$, $q(k) = k-n$, $r(k) = k$ in ta izbor že zadovoljuje pogoj (2.2). Glede na (2.7) dobimo $Q(k) = -n$ in $R(k) = 2k - n$. Ker je $deg(Q) < deg(R)$ moramo pregledati dve možnosti: ali je $d = deg(p) - deg(R) + 1$, kar je 0, ali pa je $d = -2l'/l$, kjer je $l' = -n$ in $l = 2$, torej $d = n$. To drugo možnost je treba raziskati le v primeru, ko je n pozitivno celo število. Poskusimo z $d = 0$. V tem primeru je $s(k) = \alpha_0$ in iz (2.7) dobimo

$$2 = -n \cdot 2\alpha_0 \; .$$

Torej izberemo $\alpha_0 = -1/n$. Polinom $s(k) = -1/n$ zadovoljuje (2.7) oziroma (2.5) tudi, ko je n pozitivno celo število, zato nam s polinomom $s(k)$ stopnje n ni treba poizkušati. Vstavimo $s(k)$ v (2.4), pa dobimo iskano rešitev

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{r(k)s(k)t(k)}{p(k)} \\ &= k \cdot \frac{(-1)}{n} \cdot \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k-1} \; . \end{aligned}$$

Primer 2.2 Izračunajmo $\sum \binom{n}{k} \delta k$. Vse je skoraj enako kot v prejšnjem primeru, le $q(k) = -k + n$. Spet smo upoštevali, da n ni negativno celo število. Sedaj dobimo $Q(k) = -2k + n$ in $R(k) = n$. Ker je $deg(Q) \geq deg(R)$, mora imeti d nemogočo vrednost $deg(p) - deg(Q) = -1$. Torej hipergeometrijski člen $T(k)$, za katerega bi veljalo $\Delta T(k) = \binom{n}{k}$, ne obstaja.

3. Zeilbergerjev algoritem

Mnogokrat naletimo na vsote oblike (1.5), ki jih s pomočjo nedoločenega seštevanja ne moremo izračunati (glej primer 2.2). Zeilberger [5] je predlagal, da v primeru, ko k danemu pravemu hipergeometrijskemu členu $t(n,k)$ v vsotah (1.5) ne obstaja hipergeometrijski člen $T(n,k)$, da bi veljalo

$$t(n,k) = T(n,k+1) - T(n,k) \ ,$$

poskusimo, če pri kakšnih polinomih $\beta_0(n)$, $\beta_1(n)$ obstaja hipergeometrijski člen $T(n,k)$, da bo

$$\beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) = T(n,k+1) - T(n,k) \ . \tag{3.1}$$

Ko v tej enakosti izvršimo seštevanje po k, dobimo rekurzijo 1. reda v n za iskano vsoto $s(n)$. Če ne obstajajo $\beta_0(n)$, $\beta_1(n)$ in hipergeometrijski člen $T(n,k)$, ki zadovoljijo (3.1), poskušamo najti nedoločeno vsoto $T(n,k)$ izrazu $\beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) + \beta_2(n)t(n+2,k)$. Zeilberger nam zagotavlja (glej trditev na strani 22), da bomo pri nekem d našli polinome $\beta_0(n)$, $\beta_1(n)$, $\ldots$, $\beta_d(n)$, ne vse enake nič, in pravi hipergeometrijski člen $T(n,k)$, da bo

$$\beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) + \cdots + \beta_d(n)t(n+d,k) = T(n,k+1) - T(n,k) \ . \tag{3.2}$$

Pri seštevanju po k nam ta enakost da linearno rekurzijo reda d za vsoto $s(n)$. Od tod pa, kadar je to mogoče, vsoto $s(n)$ lahko zapišemo v zaključeni obliki, kot smo že opisali v točki 7 na strani 8.

Oglejmo si Zeilbergerjev algoritem na dveh primerih, nazadnje pa še dokažimo, da nam vedno najde želeno rekurzijo.

Primer 3.1 Poiščimo vsoto

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{n}{k} z^k \ . \tag{3.3}$$

Gosperjev algoritem nam pove, da nedoločena vsota $\sum \binom{n}{k} z^k \delta k$ ni hipergeometrijski člen razen v primeru, ko je $z = -1$. Ker si torej z njo ne moremo pomagati, si namesto $t(n,k) = \binom{n}{k} z^k$ oglejmo splošnejši člen

$$\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) \ . \tag{3.4}$$

Na njem je treba uporabiti Gosperjev algoritem. Še prej izrazimo $\hat{t}(n,k)$ v uporabnejši obliki. Izračunajmo razmerje

$$\frac{t(n+1,k)}{t(n,k)} = \frac{(n+1)!\, z^k}{(n+1-k)!\, k!} \frac{(n-k)!\, k!}{n!\, z^k} = \frac{n+1}{n+1-k} \ .$$

Torej je

$$\hat{t}(n,k) = p(n,k)\,\frac{t(n,k)}{n+1-k}\ ,$$

kjer je $p(n,k) = (n+1-k)\beta_0(n)+(n+1)\beta_1(n)$. Kot v (2.1) je treba izraziti razmerje sosednjih členov v normalni obliki:

$$\frac{\hat{t}(n,k+1)}{\hat{t}(n,k)} = \frac{\hat{p}(n,k+1)}{\hat{p}(n,k)}\,\frac{q(n,k)}{r(n,k+1)}\ . \tag{3.5}$$

Gosperjeva metoda poišče to predstavitev s tem , da na začetku postavi $\hat{p}(n,k) = 1$. Toda pri Zeilbergerjevi razširitvi Gosperjevega algoritma je bolje začeti s $\hat{p}(n,k) = p(n,k)$. Opazimo, da če je $\bar{t}(n,k) = \hat{t}(n,k)/p(n,k)$, je predstavitev (3.5) ekvivalentna predstavitvi

$$\frac{\bar{t}(n,k+1)}{\bar{t}(n,k)} = \frac{\bar{p}(n,k+1)}{\bar{p}(n,k)}\,\frac{q(n,k)}{r(n,k+1)} \tag{3.6}$$

s tem, da je $\hat{p}(n,k) = p(n,k)\bar{p}(n,k)$. Tako dobimo (3.5) s tem, da rešimo (3.6) ob začetni postavitvi $\bar{p}(n,k) = 1$. To je znatno lažje, ker $\bar{t}(n,k)$ ne vsebuje neznanih količin $\beta_0(n)$ in $\beta_1(n)$, ki se pojavljata v $\hat{t}(n,k)$. V našem primeru je $\bar{t}(n,k) = t(n,k)/(n+1-k) = n!z^k/((n+1-k)!k!)$ in je

$$\frac{\bar{t}(n,k+1)}{\bar{t}(n,k)} = \frac{(n+1-k)z}{k+1}$$

ter lahko vzamemo $q(n,k) = (n+1-k)z$ in $r(n,k) = k$. Ta polinoma v k morata zadoščati pogoju (2.2), sicer moramo izločiti faktorje iz q in r ter pripadajoče faktorje vključiti v $\bar{p}(n,k)$. (Toda to storimo le, kadar je $\alpha-\beta$ v (2.2) pozitivno celo število.)

Naš prvi izbor polinomov q in r ob predpostavki, da je $n \geq -1$, že zadovoljuje (2.2) in lahko nadaljujemo z naslednjo fazo Gosperjevega algoritma: ustreči želimo rekurziji, analogni (2.5), namreč

$$\hat{p}(n,k) = q(n,k)s(n,k+1) - r(n,k)s(n,k)\ , \tag{3.7}$$

s polinomom

$$s(n,k) = \alpha_d(n)k^d + \alpha_{d-1}(n)k^{d-1} + \cdots + \alpha_0(n)\ . \tag{3.8}$$

(Za zaenkrat še neznane koeficiente polinoma s smemo izbrati funkcije n-ja, ne le konstante.) V našem primeru se enačba (3.7) glasi

$$(n+1-k)\beta_0(n) + (n+1)\beta_1(n) = (n+1-k)zs(n,k+1) - ks(n,k) \tag{3.9}$$

in nanjo gledamo kot enakost polinomov v k s koeficienti, ki so funkcije n-ja. Kot že prej določimo stopnjo d polinoma s s pomočjo polinomov $Q(n,k) = q(n,k) - r(n,k)$ in $R(n,k) = q(n,k) + r(n,k)$. Denimo, da $z \neq -1$. Ker je $deg(Q) = deg(R) = 1$ (v primeru $z = 1$ pa $1 = deg(Q) \geq deg(R) = 0$), dobimo, da je $d = deg(\hat{p}) - deg(Q) = 0$ in $s(n,k) = \alpha_0(n)$ je neodvisen od k. Enačba (3.9) postane

$$(n+1-k)\beta_0(n) + (n+1)\beta_1(n) = (n+1-k)z\alpha_0(n) - k\alpha_0(n) \; .$$

Če izenačimo potence k-ja, dobimo ekvivalenten sistem enačb

$$\begin{array}{rlrl} (n+1)\beta_0(n) + & (n+1)\beta_1(n) & -\,(n+1)z\alpha_0(n) = & 0 \; , \\ -\beta_0(n) & & +(z+1)\alpha_0(n) = & 0 \; . \end{array}$$

Torej

$$\beta_0(n) = z+1, \qquad \beta_1(n) = -1, \qquad \alpha_0(n) = s(n,k) = 1$$

zadostijo enačbi (3.7). (Po naključju n v njih ne nastopa.)

Sedaj že vemo, da obstaja hipergeometrijski člen $T(n,k)$, ki je nedoločena vsota izraza $\hat{t}(n,k) = (z+1)t(n,k) - t(n+1,k)$. Izračunamo ga s pomočjo enačbe (2.4):

$$\begin{aligned} T(n,k) = \frac{r(n,k)s(n,k)\hat{t}(n,k)}{\hat{p}(n,k)} &= \frac{k}{n+1-k} t(n,k) \\ &= \frac{k}{n+1-k}\binom{n}{k} z^k = \binom{n}{k-1} z^k \; . \end{aligned}$$

Ugotovili smo, da je

$$(z+1)t(n,k) - t(n+1,k) = T(n,k+1) - T(n,k) \; , \tag{3.10}$$

pri čemer je $t(n,k) = \binom{n}{k} z^k$ in $T(n,k) = \binom{n}{k-1} z^k$. Ko v tej enakosti izvršimo seštevanje po vseh k, na desni strani dobimo 0. Prepričati se moramo le, da je $T(n,k)$ neničeln le pri končno mnogo vrednostih k. To je v našem primeru res, če je $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Torej velja:

$$\sum_k ((z+1)t(n,k) - t(n+1,k)) = 0 \; , \qquad n \in \mathbb{Z}, \; n \geq 0 \; . \tag{3.11}$$

Če v skladu s (3.3) nadomestimo $\sum_k t(n,k)$ z $s(n)$, dobimo rekurzijo

$$(z+1)s(n) - s(n+1) = 0 \; , \qquad n \in \mathbb{Z}, \; n \geq 0 \tag{3.12}$$

za iskano vsoto $s(n)$. Upoštevajmo še začetni pogoj $s(0) = 1$, pa dobimo (brez zahtevnejših orodij za reševanje diferenčnih enačb) rešitev $s(n) = (z+1)^n$ za vsa cela nenegativna števila n.

Primer 3.2 Poiščimo vsoto

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} z^k \,. \tag{3.13}$$

(Pri $z = 1$ je to Fibonaccijevo zaporedje.) Najprej poskusimo z Gosperjevim algoritmom pri $t(k) = \binom{n-k}{k} z^k$, kar je ekvivalentno Zeilbergerjevemu algoritmu pri $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)\binom{n-k}{k} z^k$. Razmerje členov

$$\frac{t(k+1)}{t(k)} = \frac{(n-k-1)!\, z^{k+1}\, k!\, (n-2k)!}{(k+1)!\, (n-2k-2)!\, (n-k)!\, z^k} = \frac{(n-2k-1)(n-2k)z}{(n-k)(k+1)}$$

nam da $p(k) = 1$, $q(k) = (n-2k-1)(n-2k)z$, $r(k) = (n-k+1)k$. Od tod dobimo $Q(k) = (4z+1)k^2 + \cdots$ in $R(k) = (4z-1)k^2 + \cdots$. V primeru, da $z \neq -1/4$, je $deg(Q) \geq deg(R)$ in mora $s(k)$ imeti nemogočo stopnjo $d = deg(p) - deg(Q) = -2$.

Ker nismo uspeli, poskušamo s $\hat{t}(n,k)$, v katerem smo dodali še en člen: $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k)$ pri $t(n,k) = \binom{n-k}{k} z^k$. Najprej izračunamo $t(n+1,k)/t(n,k) = (n+1-k)/(n+1-2k)$, da lahko $\hat{t}(n,k)$ izrazimo v obliki

$$\hat{t}(n,k) = (\beta_0(n)(n+1-2k) + \beta_1(n)(n+1-k))\frac{t(n,k)}{n+1-2k} \,.$$

Torej je $p(n,k) = \beta_0(n)(n+1-2k) + \beta_1(n)(n+1-k)$, postopek pa nadaljujemo s $\bar{t}(n,k) = t(n,k)/(n+1-2k)$. Razmerje členov

$$\frac{\bar{t}(n,k+1)}{\bar{t}(n,k)} = \frac{\binom{n-k-1}{k+1} z^{k+1}(n+1-2k)}{(n-1-2k)\binom{n-k}{k} z^k} = \frac{(n+1-2k)(n-2k)z}{(n-k)(k+1)}$$

nam da $\bar{p}(n,k) = 1$, $q(n,k) = (n+1-2k)(n-2k)z$, $r(n,k) = (n+1-k)k$. Podobno kot prej dobimo $Q(n,k) = (4z+1)k^2 + \cdots$ in $R(n,k) = (4z-1)k^2 + \cdots$. V primeru, da $z \neq -1/4$, je $deg(Q) \geq deg(R)$ in mora $s(n,k)$ imeti nemogočo stopnjo $d = deg(\hat{p}) - deg(Q) = -1$.

Spet nismo uspeli. Torej dodamo še en parameter $\beta_2(n)$ in poskušamo s $\hat{t}(n,k) = \beta_0(n)t(n,k) + \beta_1(n)t(n+1,k) + \beta_2(n)t(n+2,k)$. V pomoč si najprej izračunamo

$$\frac{t(n+1,k)}{t(n,k)} = \frac{n+1-k}{n+1-2k} \,, \qquad \frac{t(n+2,k)}{t(n+1,k)} = \frac{n+2-k}{n+2-2k} \,.$$

Sedaj lahko zapišemo

$$\hat{t}(n,k) = ((n+2-2k)(n+1-2k)\beta_0(n) + (n+1-k)(n+2-2k)\beta_1(n) \\ +(n+2-k)(n+1-k)\beta_2(n))\frac{t(n,k)}{(n+2-2k)(n+1-2k)} \ .$$

Prvi faktor v zgornjem izrazu poimenujemo $p(n,k)$, postopek pa nadaljujemo s $\bar{t}(n,k) = t(n,k)/((n+2-2k)(n+1-2k))$. Razmerje členov

$$\frac{\bar{t}(n,k+1)}{\bar{t}(n,k)} = \frac{(n+2-2k)(n+1-2k)z}{(n-k)(k+1)}$$

nam da $\bar{p}(n,k) = 1$, $q(n,k) = (n+2-2k)(n+1-2k)z$, $r(n,k) = (n+1-k)k$. Podobno kot prej dobimo $Q(n,k) = (4z+1)k^2 + \cdots$ in $R(n,k) = (4z-1)k^2 + \cdots$. V primeru, da $z \neq -1/4$, je $deg(Q) \geq deg(R)$ in enačbi (3.7) lahko poskusimo zadostiti s polinomom $s(n,k)$ stopnje $d = deg(\hat{p}) - deg(Q) = deg(p \cdot \bar{p}) - deg(Q) = 0$. Zapišimo $s(n,k)$ v splošni obliki $s(n,k) = \alpha_0(n)$ in ga vstavimo v (3.7):

$$(n+2-2k)(n+1-2k)\beta_0(n) \\ +(n+1-k)(n+2-2k)\beta_1(n) + (n+2-k)(n+1-k)\beta_2(n) \\ = (n+2-2k)(n+1-2k)z\alpha_0(n) - (n+1-k)k\alpha_0(n) \ .$$

Izenačimo koeficiente pri istih potencah k-ja, pa dobimo sistem enačb za spremenljivke $\beta_0(n)$, $\beta_1(n)$, $\beta_2(n)$, $\alpha_0(n)$,

$$\begin{aligned} 4\beta_0 + 2\beta_1 + \beta_2 &= \alpha_0(4z+1) \ , \\ -2(2n+3)\beta_0 - (3n+4)\beta_1 - (2n+3)\beta_2 &= \alpha_0(-2z(2n+3) - (n+1)) \ , \\ (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)(n+1)(n+2) &= \alpha_0 z(n+1)(n+2) \ , \end{aligned}$$

s splošno rešitvijo $\alpha_0 = \beta_1$, $\beta_0 = \beta_1 z$, $\beta_2 = -\beta_1$. Na tem koraku tudi opazimo, da vedno dobimo homogen sistem linearnih enačb za spremenljivke $\alpha_i(n)$ in $\beta_j(n)$. Ta pa ima neničelno rešitev, brž ko število neznank presega število enačb. V našem primeru izberimo $\beta_1 = 1$, pa dobimo:

$$\beta_0(n) = z \ , \qquad \beta_1(n) = 1 \ , \qquad \beta_2(n) = -1 \ , \qquad \alpha_0(n) = 1 \ .$$

Ugotovili smo, da je

$$zt(n,k) + t(n+1,k) - t(n+2,k) = T(n,k+1) - T(n,k) \ ,$$

kjer je $T(n,k) = r(n,k)s(n,k)\hat{t}(n,k)/\hat{p}(n,k) = (n+1-k)k\bar{t}(n,k) = \binom{n+1-k}{k-1}z^k$. Izvršimo seštevanje v mejah od $k=0$ do $k=n$, pa dobimo

$$z\sum_{k=0}^{n} t(n,k) + \sum_{k=0}^{n} t(n+1,k) - \sum_{k=0}^{n} t(n+2,k) = \sum_{k=0}^{n}(T(n,k+1)-T(n,k)) \ .$$

Če skladno s (3.13) nadomestimo $\sum_{k=0}^{n} t(n,k)$ z $s(n)$, dobimo rekurzijo

$$\begin{aligned} &zs(n) + (s(n+1) - t(n+1,n+1)) \\ &\quad -(s(n+2) - t(n+2,n+1) - t(n+2,n+2)) = T(n,n+1) - T(n,0) \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} &-s(n+2) + s(n+1) + zs(n) \\ &\quad = T(n,n+1) - T(n,0) + t(n+1,n+1) - t(n+2,n+1) - t(n+2,n+2) \ . \end{aligned}$$

Vidimo, da nam za vsote oblike (1.5), v katerih ne seštevamo po vseh k-jih, Zeilbergerjev algoritem v splošnem vrne nehomogeno linearno rekurzijo s polinomskimi koeficienti. Desna stran rekurzije je v splošnem vsota do dveh nepodobnih si hipergeometrijskih členov. Vsi členi na desni strani, ki se pojavijo zaradi zgornje meje vsote, so si namreč podobni. Isto velja za člene, ki se pojavijo zaradi spodnje meje vsote.

Poglejmo, kako je z desno stranjo v našem primeru:

$$\begin{aligned} T(n,n+1) &= \binom{0}{n} z^{n+1} \ , \\ t(n+2,n+1) &= \binom{1}{n+1} z^{n+1} \ , \\ &\quad \text{torej je } t(n+2,n+1) = T(n,n+1) \text{ za } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0, \\ T(n,0) &= \binom{n+1}{-1} = 0 \text{ za vsak } n \in \mathbb{Z}, \qquad (3.14) \\ t(n+1,n+1) &= \binom{0}{n+1} z^{n+1} = 0 \text{ za } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0, \\ t(n+2,n+2) &= \binom{0}{n+2} z^{n+2} = 0 \text{ za } n \in \mathbb{Z},\ n \geq -1. \end{aligned}$$

Naša rekurzija je torej $-s(n+2)+s(n+1)+zs(n) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Upoštevamo še začetna pogoja $s(0) = 1$ in $s(1) = 1$ in pri $z \neq -1/4$ dobimo rešitev

$$s(n) = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4z}}{2}\right)^{n+1}\right) \ , \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

Omenili smo že, da Zeilbergerjev algoritem vsoti oblike (1.5) vedno najde rekurzijo, ki ji zadošča. Dokažimo trditev, ki to zagotavlja.

Trditev 3.1 *Naj bo $t(n,k)$ pravi hipergeometrijski člen. Potem obstajajo polinomi $\beta_0(n)$, $\beta_1(n)$, …, $\beta_l(n)$, ne vsi enaki nič, in pravi hipergeometrijski člen $T(n,k)$, da velja:*

$$\beta_0(n)t(n,k) + \cdots + \beta_l(n)t(n+l,k) = T(n,k+1) - T(n,k)\ . \tag{3.15}$$

Dokaz: Naj bo N operator, ki n poveča za 1, in naj bo K operator, ki k poveča za 1. Tako je na primer $N^2K^3t(n,k) = t(n+2,k+3)$. Obravnavali bomo linearne diferenčne operatorje v N, K in n, namreč polinome oblike

$$H(N,K,n) = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} \alpha_{i,j}(n)N^iK^j\ . \tag{3.16}$$

Najprej opazimo, da če je $t(n,k)$ poljuben pravi hipergeometrijski člen in $H(N,K,n)$ poljuben diferenčni operator, je tudi $H(N,K,n)t(n,k)$ pravi hipergeometrijski člen. Naj bosta ves čas t in H podana z definicijo 1.3 in (3.16) in naj nam oznaka $[izraz]$ pomeni

$$[izraz] = \begin{cases} 1\,, & \text{če je } izraz \text{ resničen} \\ 0\,, & \text{če } izraz \text{ ni resničen.} \end{cases}$$

Definirajmo ,,temeljni člen"

$$\bar{t}(n,k)_{I,J} = \frac{\prod_{i=1}^{p}(a_in + a_i'k + a_iI[a_i<0] + a_i'J[a_i'<0] + a_i'')\,!}{\prod_{i=1}^{q}(b_in + b_i'k + b_iI[b_i>0] + b_i'J[b_i'>0] + b_i'')\,!} z^k\ .$$

Na primer, če je $t(n,k) = \binom{n-2k}{k} = (n-2k)!/(k!(n-3k)!)$, potem je temeljni člen, pripadajoč linearnemu diferenčnemu operatorju stopenj I in J, $\bar{t}(n,k)_{I,J} = (n-2k-2J)!/((k+J)!(n-3k+I)!)$. Bistveno je, da kadarkoli je $0 \le i \le I$ in $0 \le j \le J$, je $\alpha_{i,j}(n)N^iK^jt(n,k)$ enak $\bar{t}(n,k)_{I,J}$, pomnoženemu s polinomom v n in k. Končna vsota polinomov je polinom, torej ima $H(N,K,n)t(n,k)$ res obliko, navedeno v definiciji 1.3.

V naslednjem koraku pokažimo, da če je $t(n,k)$ pravi hipergeometrijski člen, potem obstaja neničeln linearni diferenčni operator $H(N,K,n)$, da je

$$H(N,K,n)t(n,k) = 0 \ .$$

Če je $0 \leq i \leq I$ in $0 \leq j \leq J$, je premaknjeni člen $N^i K^j t(n,k)$ enak $\bar{t}(n,k)_{I,J}$, pomnoženemu s polinomom v n in k, ki ima stopnjo kvečjemu

$$D_{I,J} = deg(f) + |a_1|I + |a'_1|J + \cdots + |a_p|I + |a'_p|J + |b_1|I + |b'_1|J + \cdots + |b_q|I + |b'_q|J$$

v spremenljivki k. Torej želeni H obstaja, če lahko rešimo $D_{I,J} + 1$ homogenih linearnih enačb v $(I+1)(J+1)$ spremenljivkah $\alpha_{i,j}(n)$ s koeficienti, ki so polinomi v n. Vse, kar je treba, je izbrati I in J dovolj velika, da bo $(I+1)(J+1) > D_{I,J}+1$. Na primer izberemo lahko $I = A'$ in $J = 1 + deg(f) + (A-1)A'$, kjer je $A = |a_1| + \cdots + |a_p| + |b_1| + \cdots + |b_q|$ in $A' = |a'_1| + \cdots + |a'_p| + |b'_1| + \cdots + |b'_q|$.

Zadnji korak v dokazu je, da pridemo od enačbe $H(N,K,n)t(n,k) = 0$ do rešitve (3.15). Naj bo H izbran tako, da je J minimalen, to je tako, da ima H najmanjšo možno stopnjo v K. Zapišemo lahko

$$H(N,K,n) = H(N,1,n) - (K-1)G(N,K,n)$$

za nek linearen diferenčni operator $G(N,K,n)$. Naj bo $H(N,1,n) = \beta_0(n) + \beta_1(n)N + \cdots + \beta_l(n)N^l$ in $T(n,k) = G(N,K,n)t(n,k)$. Potem je $T(n,k)$ pravi hipergeometrijski člen in (3.15) velja.

Nazadnje moramo še preveriti, da $H(N,1,n)$ ni kar ničelni operator. Če je, potem je $T(n,k)$ neodvisen od k. Torej obstajata polinoma $\beta_0(n)$ in $\beta_1(n)$, da je $(\beta_0(n) + \beta_1(n)N)G(N,K,n)$ neničeln linearni diferenčni operator stopnje $J-1$, ki uniči $t(n,k)$. To pa je v protislovju s predpostavko, da je J minimalen. $\Box$

V Zeilbergerjevem algoritmu skušamo s povečevanjem števila neznank $\beta_i(n)$ najti tak izraz

$$\beta_0(n)t(n,k) + \cdots + \beta_l(n)t(n+l,k) \ , \tag{3.17}$$

da mu bo pri prav izbranih vrednostih neznank Gosperjev algoritem lahko našel nedoločeno vsoto $T(n,k)$. Trditev nam zagotavlja, da nam bo to tudi uspelo. Seveda je možno, da to uspe pri takem izboru neznank, da je vrednost izraza (3.17) enaka 0. Pozabili pa smo, da v Gosperjevem algoritmu ni predvideno, da bi z njim iskali nedoločeno vsoto zaporedja 0. Zato moramo pri Zeilbergerjevem algoritmu na vsakem koraku, kjer poskušamo najti „skrivni" polinom $s(n,k)$, poskusiti tudi s polinomom $s(n,k) = 0$.

3.1. Primeri uporabe Zeilbergerjevega algoritma

Ogledali si bomo nekaj zanimivih rezultatov, ki nam jih posreduje Zeilbergerjev algoritem. Uporabili bomo program *Zb* v programskem jeziku *Mathematica* avstrijskih avtorjev Petra Paula in Markusa Schorna. V Mathematici že obstaja vgrajen program *SymbolicSum*, ki poskuša vsote zapisati v zaključeni obliki s pomočjo klasičnih metod. Vendar ta program pogosto ne najde zaključene oblike, kljub temu da obstaja.

Primer 3.3 Poskušajmo najti zaključene oblike vsotam potenc binomskih koeficientov:

$$s_1(n) = \sum_k \binom{n}{k}, \quad s_2(n) = \sum_k \binom{n}{k}^2, \quad s_3(n) = \sum_k \binom{n}{k}^3,$$
$$s_4(n) = \sum_k \binom{n}{k}^4, \quad s_5(n) = \sum_k \binom{n}{k}^5, \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

Zeilbergerjev algoritem nam vrne naslednje rekurzije, ki jim te vsote zadoščajo:

$$\begin{aligned}
&2s_1(n) - s_1(n+1) = 0\ ,\\
&-2(1+2n)s_2(n) + (1+n)s_2(n+1) = 0\ ,\\
&-8(1+n)^2 s_3(n) + (-16-21n-7n^2)s_3(n+1) + (2+n)^2 s_3(n+2) = 0\ ,\\
&-4(1+n)(3+4n)(5+4n)s_4(n) - 2(3+2n)(7+9n+3n^2)s_4(n+1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(2+n)^3 s_4(n+2) = 0\ ,\\
&32(1+n)^4(292+253n+35n^2)s_5(n) + (-514048 - 1827064n - 2682770n^2\\
&-2082073n^3 - 900543n^4 - 205799n^5 - 19415n^6)s_5(n+1) + (-79320 - 245586n\\
&-310827n^2 - 205949n^3 - 75498n^4 - 14553n^5 - 1155n^6)s_5(n+2)\\
&\qquad\qquad\qquad +(3+n)^4(94+143n+55n^2)s_5(n+3) = 0\ .
\end{aligned}$$

Splošna rešitev prve rekurzije je $s_1(n) = C \cdot 2^n$. Upoštevajmo začetni pogoj $s_1(0) = 1$, pa dobimo $C = 1$ in $s_1(n) = 2^n$. Iz druge rekurzije dobimo

$$\begin{aligned}
s_2(n) &= \frac{(2n)(2n-1)}{n^2} s_2(n-1) \text{ in je}\\
s_2(n) &= \frac{(2n)(2n-1)\cdot(2n-2)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n^2\cdot(n-1)^2\cdot\ldots\cdot 2^2\cdot 1^2} s_2(0)\ .
\end{aligned}$$

Upoštevajmo še začetni pogoj $s_2(0) = 1$, pa dobimo rešitev

$$s_2(n) = \frac{(2n)!}{n!n!} s_2(0) = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}\ .$$

S programom Hyper se lahko prepričamo, da zadnje tri rekurzije nimajo hipergeometrijskih rešitev.

Primer 3.4 Poskušajmo dokazati Vandermondovo konvolucijo $\sum_k \binom{r}{k}\binom{t}{n-k} = \binom{r+t}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Naj bo

$$s(n) = \sum_k \binom{r}{k}\binom{t}{n-k} .$$

Zeilbergerjev algoritem nam vrne rekurzijo $(-n+r+t)s(n)+(-1-n)s(n+1) = 0$. Torej je

$$s(n) = \frac{-n+r+t+1}{n} s(n-1) \text{ in je } s(n) = \frac{(-n+r+t+1)^{\underline{n}}}{n^{\underline{n}}} \cdot C = C\binom{r+t}{n} .$$

Upoštevajmo začetni pogoj $s(0) = 1$. Torej je $C = 1$ in $s(n) = \binom{r+t}{n}$.

V našem primeru lahko rekurzijo poiščemo v vsaki od spremenljivk n, r in t, saj je sumand pravi hipergeometrijski člen v vseh treh primerih. Storimo to še za spremenljivko r. Za

$$s(r) = \sum_k \binom{r}{k}\binom{t}{n-k} \text{ dobimo rekurzijo } (1+r+t)s(r)+(-1+n-r-t)s(r+1) = 0.$$

Torej je

$$s(r) = \frac{r+t}{-n+r+t} s(r-1) \text{ in je } s(r) = \frac{(r+t)^{\underline{r}}}{(-n+r+t)^{\underline{r}}} \cdot C = \frac{C(r+t)!\,(-n+t)!}{t!\,(-n+r+t)!}$$

Upoštevajmo začetni pogoj $s(0) = \binom{t}{n}$, pa dobimo $C = \binom{t}{n}$ in $s(r) = \binom{r+t}{n}$.

Primer 3.5 Poskusimo izpeljati Saalschűtzevo identiteto. Naj bosta $m,\ n \in \mathbb{Z}$, $m,\ n \geq 0$. Za

$$\sum_k \binom{m-r+t}{k}\binom{n+r-t}{n-k}\binom{r+k}{m+n}$$

lahko dobimo tako kot v prejšnjem primeru več rekurzij:

$$\begin{aligned}
(n-t)s(n) + (1+n)s(n+1) &= 0 ,\\
(m-r)s(m) + (1+m)s(m+1) &= 0 ,\\
(-1-r)s(r) + (1-m+r)s(r+1) &= 0 ,\\
(1+t)s(t) + (-1+n-t)s(t+1) &= 0 .
\end{aligned}$$

Vse rekurzije so 1. reda in imajo zato hipergeometrijsko rešitev. Rešimo prvo od njih:

$$s(n) = \frac{1-n+t}{n} s(n-1) \text{ in je } s(n) = \frac{(1-n+t)^{\underline{n}}}{n^{\underline{n}}} \cdot C = \frac{t\,!}{(-n+t)\,!\;n\,!} \cdot C = C\binom{t}{n}.$$

Začetni pogoj $s(0) = \binom{r}{m}$ nam da $C = \binom{r}{m}$ in $s(n) = \binom{r}{m}\binom{t}{n}$.

Primer 3.6 Izpeljimo Dixonovo identiteto. Naj bodo a, b, c, nenegativna cela števila in

$$s(a) = \sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}(-1)^k .$$

Spet dobimo rekurzijo 1. reda: $-(1+a+b+c)s(a) + (1+a)s(a+1) = 0$. Njena splošna rešitev je

$$s(a) = C\binom{a+b+c}{a}, \text{ začetni pogoj pa } s(0) = \binom{b+c}{b}.$$

Rešitev je torej $s(a) = (a+b+c)\,!\ /\ (a!\ b!\ c!)$. Zgornja vsota je simetrična v spremenljivkah a, b, c, zato dobimo rekurziji v spremenljivkah b in c enake oblike kot pri a.

Primer 3.7 Izpeljimo Dougallovo identiteto. Naj bodo a, b, c, d cela nenegativna števila in

$$s(a) = \sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+d}{c+k}\binom{d+a}{d+k} \Big/ \binom{2a+2b+2c+2d}{a+b+c+d+k}.$$

Za $s(a)$ dobimo rekurzijo $(1+a+b+c)(1+a+b+d)(1+a+c+d)s(a) - 2(1+a)(1+a+c)(1+2a+2b+2c+2d)s(a+1) = 0$. Upoštevajmo začetni pogoj $s(0) = \binom{b+c}{b}\binom{c+d}{c}/\binom{2b+2c+2d}{b+c+d}$, pa dobimo rešitev

$$s(a) = \frac{(a+b+c+d)\,!\,(a+b+c)\,!\,(a+b+d)\,!\,(a+c+d)\,!\,(b+c+d)\,!}{(2a+2b+2c+2d)\,!\,(a+c)\,!\,(b+d)\,!\,a\,!\,b\,!\,c\,!\,d\,!}.$$

Primer 3.8 Še nedavno je bilo matematikom težko dokazati, da Aperyjeva števila

$$A(n) = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0,$$

zadoščajo rekurziji $(1+n)^3A(n)-(3+2n)(39+51n+17n^2)A(n+1)+(2+n)^3A(n+2)=0$. Danes računalniški program najde rekurzijo v nekaj sekundah. Dokaz, da zaporedje $A(n)$ zadošča zgornji rekurziji pa je bil eden ključnih vodil, ki so Zeilbergerja pripeljala do splošne metode za iskanje rekurzij. Program Hyper nam še pove, da ni hipergeometrijskih zaporedij, ki bi zadoščala zgornji rekurziji.

4. Zaključek

Metodi Gosperja in Zeilbergerja nam močno olajšujeta izračunavanje vsot. Nekdaj sta bila pri iskanju vsot potrebna navdih in spretnost, pri opisanih metodah pa to ni več potrebno. Ti metodi nam pomagata tudi pri dokazovanju že znanih identitet.

Če bi hoteli napisati program, ki bi vsotam iskal zaključene oblike, kot je opisano v točki 7 na strani 8, bi naleteli na dve težavi. Prva je ta, da je težko ugotoviti, od katerega argumenta naprej rekurzija, ki jo vrne Zeilbergerjev algoritem, velja. Druga pa je ta, da bi bilo potrebno veliko spretnosti pri manipuliranju z izrazi, v katerih nastopajo fakultete. Z naivnim računanjem namreč zelo hitro naletimo na nedoločene vrednosti $(0\cdot\infty)$ ali celó na netočne vrednosti, katerim bi se z ustreznim načinom računanja lahko izognili.

Kljub veliki uporabnosti Zeilbergerjevega algoritma, pa si z njim pri vseh vsotah z binomskimi koeficienti ne moremo pomagati. Navedimo le eno tako vsoto, v kateri sumand ni pravi hipergeometrijski člen:

$$\sum_k \binom{tk+r}{k}\binom{tn-tk+s}{n-k}\frac{r}{tk+r} = \binom{tn+r+s}{n}, \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0.$$

Literatura

[1] Darko Veljan
Kombinatorika s teorijom grafova
Zagreb, Školska knjiga, 1989

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik
Concrete Mathematics, 2. izdaja
Addison-Wesley, 1994

[3] Ivan Vidav
Algebra
Ljubljana, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, 1980

[4] Marko Petkovšek
Hypergeometric Solutions of Linear Recurrences with Polynomial Coefficients
J. Symbolic Computation (1992) 14, 243-264

[5] Doron Zeilberger
The Method of Creative Telescoping
J. Symbolic Computation (1991) 11, 195-204

[6] Doron Zeilberger
A Fast Algorithm for Proving Terminating Hypergeometric Identities
Discrete Mathematics 80 (1990) 207-211 North-Holland

ZAHVALA

Zahvaljujem se vsem, ki so mi pri diplomski nalogi pomagali in me spodbujali, še posebno pa doc. dr. Marku Petkovšku za potrpežljivost.

Marko Koselj