UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika - pedagoška smer (UNI)

Marko Koselj

PRIMERI UPORABE NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

Diplomsko delo

Ljubljana, 2002

“Sin človekov je namreč prišel iskat in rešit, kar je izgubljeno.”
(Lk 19,10)

Kazalo

Program diplomskega dela

Analizirajte nekaj primerov izvora navadnih diferencialnih enačb, kot so:

- gibanje nabitega delca,
- gibanje binarnega sistema,
- moteno Keplerjevo gibanje,
- satelitske orbite sploščenega planeta,
- diamagnetični Keplerjev problem,
- sistem dveh sklopljenih nihal,
- veriga sklopljenih oscilatorjev,

LITERATURA.

Carmen Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications.* Texts in Applied Mathematics 34. Springer Verlag, 1999.

prof. dr. Egon Zakrajšek

POVZETEK

Predstavljeni so naslednji primeri uporabe navadnih diferencialnih enačb v fiziki: gibanje nabitega delca v električnem in magnetnem polju, problem dveh teles vključno z obravnavo perturbacij ter sklopljeni oscilatorji.

Math. Subj. Class. (2000): 34A34, 70F05, 70J10

Ključne besede: *navadne diferencialne enačbe, uporaba, nabit delec, problem dveh teles, moteno gibanje dveh teles, Delaunayevi elementi, diamagnetični Keplerjev problem, sklopljeni nihali, sklopljeni oscilatorji*

Key words: *ordinary differential equations, application, charged particle, two-body problem, disturbed two-body motion, Delaunay elements, diamagnetic Kepler problem, coupled pendula, coupled oscillators*

ZAHVALA

Zahvaljujem se za Božje darove: drugo življenje, ponovno možnost študija in nadarjenost. Zahvaljujem se ženi Veroniki Koselj in najinim staršem za zaupanje ter moralno in materialno podporo v času študija. Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Egonu Zakrajšku, ki mi je izbral diplomsko nalogo in mi svetoval ob nejasnostih; naloga mi je bila v prijeten izziv. Zahvaljujem se prof. dr. Carmenu Chiconeu, avtorju knjige, ki mi je bila vir za diplomsko delo, za izčrpne odgovore na moja vprašanja. Zahvaljujem se prijateljema, fiziku Klemenu Bohincu, ki mi je osvetlil nekaj fizikalnih pojavov, in Barbari Bogataj, ki mi je narisala skice. Zahvaljujem se Jožetu Ftičarju za jezikovne korekture.

OZNAKE

Običajni skalarni produkt vektorjev $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ bomo označevali z $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, običajno, evklidsko normo vektorja $\mathbf{a}$ pa z $|\mathbf{a}| := \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$. Mešani produkt vektorjev $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ bomo označevali z $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle := \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Ortonormirano bazo $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ prostora $\mathbb{R}^3$, ki zadošča pravilu desne roke, bomo označevali z $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$.

1 Uvod

Diferencialne enačbe so uporabno orodje, ko skušamo predvideti, kako se bodo s časom spreminjale vrednosti spremenljivk nekega sistema. Uporabne so na področjih naravoslovja in tudi družboslovja.

Fizika je še posebno izčrpen vir diferencialnih enačb. Z njimi opišemo izbrano fizikalno zakonitost. Tehnika reševanja diferencialnih enačb pa nam omogoči rešiti fizikalni problem, na primer napovedati razvoj sistema pri danih začetnih pogojih.

Diferencialni enačbi, ki sprašuje po skalarni ali vektorski funkciji ene spremenljivke, pravimo navadna diferencialna enačba. Veliko navadnih diferencialnih enačb izhaja iz problemov klasične fizike. Pojavljajo se tudi pri obravnavanju parcialnih diferencialnih enačb.

Lepe primere navadnih diferencialnih enačb, ki izhajajo iz klasične fizike in katere si bomo v tem diplomskem delu sposodili, najdemo v učbeniku za podiplomski študij [2].

1.1 Klasična fizika

V učbenikih fizike, na primer [3, 2. knjiga, razdelek 18-2] ali [9], si bežno oglejmo enačbe klasične fizike. Presenečeni smo, ko opazimo, da osnovne zakone klasične fizike lahko skrčimo na nekaj formul. Na primer celotna teorija elektromagnetizma je podana s štirimi Maxwellovimi enačbami[1] in enačbo o ohranitvi naboja. Osnovni zakon gibanja je Newtonov zakon[2]

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{1.1}$$

Pri tem $\mathbf{p}$ označuje gibalno količino delca, t čas, $\mathbf{F}$ pa vsoto sil na delec. Relativistična gibalna količina delca je podana s

$$\mathbf{p} := \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.2}$$

Pri tem kot ponavadi c označuje svetlobno hitrost, m maso delca, $\mathbf{v}$ njegovo hitrost in $v := |\mathbf{v}|$. Za klasični delec, to je delec, ki ga obravnava Newtonova mehanika, v kateri predpostavljamo, da so hitrosti delcev veliko manjše od svetlobne hitrosti, uporabljamo približek za gibalno količino $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$. V nasprotju s sodobno fiziko, kjer nastopajo štiri znane osnovne sile, v klasični fiziki nastopata le dve: gravitacijska sila

$$\mathbf{F} = -\frac{G_0 M m}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{1.3}$$

[1] James Clerk Maxwell (1831-1879) je bil angleški fizik.
[2] Sir Isaac Newton (1642-1727) je bil angleški matematik.

na delec z maso m zaradi druge mase M, kjer je G_0 gravitacijska konstanta in $\mathbf{e}_r$ enotski vektor, usmerjen od delca z maso M proti delcu z maso m; in Lorentzova sila[3]

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{1.4}$$

kjer je q naboj delca, $\mathbf{E}$ jakost električnega polja in $\mathbf{B}$ gostota magnetnega polja. To je vse.

Zakoni klasične fizike izgledajo dovolj enostavno. Ker pa pri njihovi uporabi v praksi skoraj vedno nastopa ogromno delcev in zakoni zanje delujejo vsi naenkrat, postanejo opisi sistemov zelo zapleteni. Ko poskušamo izolirati kakšen poskus ali fizikalni pojav od vsega ostalega v okolici, nas to privede do vpeljave "konstitutivnih" zakonov, ki aproksimirajo resnično stanje. Enačbe gibanja potem vsebujejo mnogo dodatnih "sil", na primer silo vzmeti, podano s Hookovim zakonom[4], silo trenja, silo zračnega upora in druge. Če bi namesto z njimi sistem delcev poskušali opisati z osnovnima silama, delujočima na vsak delec sistema, bi enačbe gibanja postale tako zapletene, da iz njih ne bi mogli izluščiti uporabnih napovedi.

Pomembna je ugotovitev, da je Newtonov zakon gibanja, ki je tako osnoven za razumevanje načina obnašanja stvarstva, izražen kot navadna diferencialna enačba. Newtonov zakon, osnovni sili klasične fizike in konstitutivni zakoni so izvor navadnih diferencialnih enačb. Očitno velja, kar je rekel Newton: "Reševanje diferencialnih enačb je uporabno."

1.2 Geometrijski pogled na diferencialne enačbe

Primeri uporabe navadnih diferencialnih enačb so v [2] navedeni tudi deloma kot ilustracija geometrijskega pogleda na diferencialne enačbe. Osnove tega so predstavljene v [6], širša predstavitev je v [2], temeljito predstavitev pa najdemo v zahtevnejših knjigah, na primer v Arnol'dovi[5] zbirki Dynamical Systems. Mi bomo ta pogled le na kratko predstavili.

Za splošnejšo obravnavo navadnih diferencialnih enačb so zelo primerni avtonomni sistemi prvega reda. Avtonomni sistem prvega reda je sistem oblike

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.5}$$

v katerem je funkcija $\mathbf{f}$ gladka in ni eksplicitno odvisna od neodvisne spremenljivke t, sprašuje pa po neznani gladki funkciji $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$. Imenujemo ga tudi avtonomna vektorska diferencialna enačba. Na to obliko lahko prevedemo poljuben neavtonomni sistem višjega reda oblike

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}).$$

[3] Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) je bil nizozemski fizik, Nobelov nagrajenec.

[4] Robert Hooke (1635-1703) je bil angleški naravoslovec.

[5] Vladimir I. Arnol'd (1937-) je sovjetski matematik.

Najprej za $\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}$ uvedemo nove funkcije $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, ... , $\mathbf{z}_{n-1}$, da dobimo neavtonomni sistem prvega reda oblike $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Tega pa lahko prevedemo na "ekvivalenten" avtonomni sistem z vpeljavo nove spremenljivke takole:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}), \\ \dot{\tau} &= 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Na primer, če je $t \mapsto (\boldsymbol{\phi}(t), \tau(t))$ rešitev tega sistema s $\boldsymbol{\phi}(t_0) = \mathbf{x}_0$ in $\tau(t_0) = t_0$, potem je $\tau(t) = t$ in

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\phi}(t)), \qquad \boldsymbol{\phi}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Tako je funkcija $t \mapsto \boldsymbol{\phi}(t)$ rešitev naloge

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Tako opazimo, da lahko vsako rešitev neavtonomnega sistema dobimo iz rešitve avtonomnega sistema (1.6). Ni pa vedno modro prevesti neavtonomnega sistema na avtonomni sistem diferencialnih enačb.

Pogosto je težko poiskati rešitve diferencialnih enačb. Zato se pogosto zadovoljimo že z geometrijsko izraženimi kvalitativnimi lastnostmi rešitev. Poznati pa moramo geometrijsko interpretacijo avtonomnih sistemov.

S sistemom (1.5) je povezano vektorsko polje

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1.7}$$

definirano na prostoru $\mathbb{R}^n$. Sistemi oblike (1.5) so v bijektivni korespondenci z vektorskimi polji na $\mathbb{R}^n$, zato je smiselno opazovati ta vektorska polja. Če na rešitve $\boldsymbol{\phi}(t)$ enačbe (1.5) gledamo kot na krivulje v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$, opazimo, da ob vsakem času t mora veljati

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t)).$$

Z drugimi besedami: vsak tangentni vektor na rešitveno krivuljo je podan z vektorjem vektorskega polja. To nam daje slutiti, da je geometrija vektorskega polja (1.7) tesno povezana z geometrijo rešitev diferencialne enačbe (1.5).

Rešitve avtonomne enačbe (1.5) imenujemo *gibanja.* Sliki rešitve v prostoru $\mathbb{R}^n$ pravimo *fazni tir.* Ker je v vsaki točki prostora $\mathbb{R}^n$ tangenta na rešitveno krivuljo enolično določena, se lahko hitro prepričamo, da obstajajo le trije tipi faznih tirov:

- točka (Pripadajoče gibanje je v tem primeru konstantna funkcija. Zato tak fazni tir ponavadi imenujemo *negibna točka* ali *točka mirovanja.*),
- enostavna sklenjena krivulja (Fazni tir tega tipa imenujemo *sklenjeni fazni tir* ali *periodični fazni tir.*),
- homeomorfna slika intervala.

Domeno $\mathbb{R}^n$ vektorskega polja (1.7) imenujemo *fazni prostor*. Geometrijsko sliko vseh faznih tirov imenujemo *fazni portret*. Predoča nam vse možne usode točk, ki so pokorne enačbi (1.5). Kljub temu, da v faznem portretu lahko nastopajo fazni tiri le treh tipov, je fazni portret lahko zelo zapleten.

Fazni tiri so poseben primer invariantnih množic. Množico $S \subseteq \mathbb{R}^n$ imenujemo *invariantna množica* za diferencialno enačbo (1.5), če za vsak $\mathbf{x}_0 \in S$ fazni tir gibanja, ki je rešitev začetne naloge

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

leži v S. Če je poleg tega S mnogoterost, imenujemo S *invariantna mnogoterost*. Imejmo funkcijo $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in izberimo konstanto $c \in \mathbb{R}$. Množico

$$S_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : G(\mathbf{x}) = c\}$$

imenujemo *nivojnica* funkcije G. Naj bo funkcija G taka, da je vektor $\operatorname{grad} G(\mathbf{x})$ ortogonalen na enačbi (1.5) pripadajoče vektorsko polje $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ v vsaki točki $\mathbf{x}$ neke odprte podmnožice $\mathbb{R}^n$. V tem primeru opazimo, da za vsako rešitev $\mathbf{x}(t)$ enačbe (1.5) velja

$$\frac{dG(\mathbf{x}(t))}{dt} = \operatorname{grad} G \cdot \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{grad} G \cdot \mathbf{f} = 0.$$

Torej je funkcija G na rešitvah konstantna oziroma je prvi integral sistema enačb. Vsaka nivojnica funkcije G, ki je vsebovana v prej omenjeni odprti množici, je zato invariantna množica. Tudi v kanonskih sistemih, katerih Hamiltonova funkcija[6] $H(\mathbf{x})$ je neodvisna od časa, je $\operatorname{grad} H(\mathbf{x})$ ortogonalen na sistemu pripadajoče vektorsko polje. Nivojnicam v tem primeru rečemo *energijske ploskve*. Če poznamo več prvih integralov enačbe (1.5), lahko tvorimo preseke pripadajočih nivojnic. Tudi ti so invariantne množice. Fazni prostor je unija teh invariantnih množic. Pravimo, da invariantne množice sestavljajo *foliacijo* (*listanje*) faznega prostora. Več ko poznamo prvih integralov, manjša je "dimenzija" invariantnih množic, iz katerih je sestavljena foliacija faznega prostora, in bolj si predstavljamo naravo rešitev enačbe (1.5), če jo že ne uspemo rešiti.

Vidimo, da invariantne množice oziroma invariantne mnogoterosti igrajo pomembno vlogo, ko si skušamo predočiti rešitev diferencialne enačbe. Med njimi ponavadi posebno temeljito opazujemo negibne točke in periodične fazne tire, saj je mogoče marsikaj povedati o njihovi stabilnosti.

Invariantne mnogoterosti so lahko tudi torusi višjih dimenzij (poleg že omenjenih periodičnih faznih tirov, ki so 1-dimenzionalni torusi). Invariantni torusi imajo pomembno vlogo pri razpoznavanju integrabilnih sistemov. Mnogo pomembnih vprašanj s področja diferencialnih enačb izvira iz problema analiziranja perturbacij *(popolnoma) integrabilnih sistemov*; to so sistemi, katerih fazni prostor ima

[6] Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) je bil angleški matematik.

foliacijo, sestavljeno iz invariantnih torusov. Velja, da če ima fazni prostor foliacijo, sestavljeno iz k-dimenzionalnih torusov, potem obstaja nov koordinatni sistem, v katerem imajo enačbe gibanja neperturbiranega sistema enostavno obliko

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}} &= \mathbf{0},\\ \dot{\boldsymbol{\phi}} &= \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I}),\end{aligned}$$

enačbe gibanja perturbiranega sistema pa imajo obliko

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}} &= \epsilon\mathbf{P}(\mathbf{I},\boldsymbol{\phi}),\\ \dot{\boldsymbol{\phi}} &= \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I})+\epsilon\mathbf{Q}(\mathbf{I},\boldsymbol{\phi}).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Pri tem je $\mathbf{I}$ vektor "akcijskih" spremenljivk, $\boldsymbol{\phi}$ je k-dimenzionalni vektor "kotnih" spremenljivk, $\mathbf{P}$ in $\mathbf{Q}$ sta 2π-periodični funkciji kotnih spremenljivk in ϵ je velikost perturbacije. Poincaré[7] je imenoval analizo tega sistema *osnovni problem dinamike*. Z drugimi besedami, če začnemo s "popolnoma integrabilnim" mehanskim sistemom v akcijsko-kotnih spremenljivkah, tako da ima obliko $\dot{\mathbf{I}}=\mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{I})$, in če dodamo majhno silo, potem je naloga opisati nadaljnje gibanje. Ta problem je že preko sto let ena od osrednjih tém matematičnega raziskovanja. Še vedno je eden glavnih virov pomembnih vprašanj.

[7]Jules Henri Poincaré (1854-1912) je bil francoski matematik.

2 Gibanje nabitega delca

Zanima nas, kako se giblje nabit delec v elektromagnetnem polju v relativističnem in v nerelativističnem primeru. Zato v Newtonov zakon gibanja (1.1) vstavimo Lorentzovo silo (1.4). Dobimo Lorentzov zakon

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{2.1}$$

Pri tem se zavedamo, kot smo omenili v (1.2), da je v splošnem primeru gibalna količina

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \tag{2.2}$$

kjer je

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.3}$$

V posebni teoriji relativnosti namesto vektorjev iz $\mathbb{R}^3$ uporabljamo vektorje četverce, v katerih je poleg treh krajevnih komponent zajeta tudi časovna komponenta. Vektor gibalne količine zapišemo v komponentah $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (\gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z)$, vektor četverec gibalne količine pa $p^\mu = (p_t, p_x, p_y, p_z) = (\gamma m c, \gamma m v_x, \gamma m v_y, \gamma m v_z)$. Poiščimo zvezo med komponentami četverca gibalne količine. Računajmo:

$$\begin{aligned} p_t^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 &= (\gamma m c)^2 - (\gamma m v_x)^2 - (\gamma m v_y)^2 - (\gamma m v_z)^2 = \\ &= \gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = \frac{m^2(c^2 - v^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

S pomočjo prve komponente četverca gibalne količine vpeljemo *polno energijo delca*:

$$\mathcal{E} := c p_t = \gamma m c^2. \tag{2.5}$$

Polna energija delca se od kinetične energije razlikuje po tem, da je drugače umerjena. Mirujoč delec ima kinetično energijo enako 0, njegova polna energija pa je mc^2. Iz zveze (2.4) dobimo, da je polna energija delca odvisna od gibalne količine takole:

$$\mathcal{E} = c p_t = c\sqrt{m^2 c^2 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}. \tag{2.6}$$

Ker v posebni teoriji relativnosti uporabljamo vektorje četverce, Lorentzovemu zakonu poleg treh enačb gibanja (2.1) pripada še ena enačba. Četrta enačba, ki pripada prvi (časovni) komponenti vektorjev četvercev, je

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\langle \mathbf{E}, \mathbf{v} \rangle. \tag{2.7}$$

V nadaljevanju, ko bomo reševali enačbe gibanja (2.1) skupaj z (2.7), se bomo omejili na dva primera. V prvem primeru magnetnega polja ne bo, električno polje pa bo konstantno vektorsko polje, to je neodvisno od časa in kraja. V drugem primeru električnega polja ne bo, magnetno polje pa bo konstantno. Oba primera najdemo v [7].

2.1 Gibanje v stacionarnem homogenem električnem polju

Oglejmo si, kako se giblje nabit delec v primeru, ko je $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ in $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. Začetna gibalna količina delca naj bo $\mathbf{p}(0) = (p_x(0), p_y(0), p_z(0)) = (0, p_0, 0)$. Začetna lega delca naj bo $\mathbf{R}(0) = (x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$. Imamo torej stacionarno homogeno električno polje, usmerjeno v smeri osi x, delec pa prileti v električno polje v smeri osi y.

Pot nas bo vodila takole: najprej bomo poiskali funkcijo $\mathbf{p}(t)$, potem $\mathcal{E}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{R}(t)$, $t(y)$ in nazadnje $x(y)$.

Najprej zapišimo enačbe gibanja (2.1) za naš konkreten primer:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= qE, \\ \dot{p}_y &= 0, \\ \dot{p}_z &= 0. \end{aligned}$$

Takoj vidimo

$$\begin{aligned} p_x(t) &= qEt + A, \\ p_y(t) &= B, \\ p_z(t) &= C, \end{aligned}$$

kjer so A, B, C konstante. Ob upoštevanju začetnih pogojev dobimo

$$\begin{aligned} p_x(t) &= qEt, \\ p_y(t) &= p_0, \\ p_z(t) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Od tod iz (2.6) dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= c\sqrt{m^2c^2 + \langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t) \rangle} = c\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2 + p_0^2} = \\ &= \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (cqEt)^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

kjer je $\mathcal{E}_0 := \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2}$ polna energija delca ob času $t = 0$. Iz (2.2), (2.5), (2.8) in (2.9) dobimo

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\gamma m}\mathbf{p}(t) = \frac{c^2}{\mathcal{E}(t)}\mathbf{p}(t) = (\frac{c^2qEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}}, \frac{c^2p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}}, 0).$$

Hitrost delca $\mathbf{v}(t)$ integrirajmo, da dobimo krajevni vektor $\mathbf{R}(t)$:

$$\begin{aligned}
x(t) - x(0) &= \int_0^t \frac{c^2 qEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}}\, dt, \\
y(t) - y(0) &= \int_0^t \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}}\, dt, \\
z(t) - z(0) &= \int_0^t 0\, dt.
\end{aligned}$$

Integrale izračunamo. Malo dalj se zamudimo z drugim integralom, ko se moramo spomniti $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C = \operatorname{arsh} u + C$. Upoštevamo še začetne pogoje in dobimo

$$x(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}\left(\sqrt{1 + (\frac{cqEt}{\mathcal{E}_0})^2} - 1\right), \tag{2.10}$$

$$y(t) = \frac{cp_0}{qE} \operatorname{arsh}(\frac{cqEt}{\mathcal{E}_0}), \tag{2.11}$$

$$z(t) = 0.$$

Kljub temu, da smo ravnokar izračunali, kako se delec giblje, si še ne predstavljamo, kakšna je njegova pot v prostoru. Da dobimo tir delca, iz (2.11) izrazimo čas t,

$$t = \frac{\mathcal{E}_0}{cqE} \operatorname{sh}(\frac{qE}{cp_0} y),$$

in ga vstavimo v (2.10). To nam da

$$x(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}(\operatorname{ch}(\frac{qE}{cp_0} y) - 1). \tag{2.12}$$

V stacionarnem homogenem električnem polju se delec giblje vzdolž verižnice.

V nerelativističnem primeru, ko so hitrosti veliko manjše od svetlobne, $v \ll c$, lahko naredimo nekaj poenostavitev:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1, \\
p_0 &= \gamma m v_0 \approx m v_0, \\
\mathcal{E}_0 &= \sqrt{m^2c^4 + c^2 p_0^2} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\gamma^2 m^2 v_0^2} = mc^2\sqrt{1 + \gamma^2(\frac{v_0}{c})^2} \approx mc^2.
\end{aligned}$$

Ocenimo še argument, ki nastopa v zgoraj dobljeni verižnici:

$$\left|\frac{qEy}{cp_0}\right| \approx \left|\frac{qEy}{cmv_0}\right| = \left|\frac{ma_x y}{cmv_0}\right| = \left|\frac{a_x y}{cv_0}\right| = \left|\frac{a_x v_0 t}{cv_0}\right| = \left|\frac{a_x t}{c}\right| = \left|\frac{v_x}{c}\right| \le \frac{v}{c} \ll 1.$$

Pri tem smo z a_x in v_x označili pospešek oziroma hitrost delca v smeri osi x. Ker je argument, ki nastopa v verižnici (2.12), zelo majhen, smemo v razvoju verižnice v Taylorjevo vrsto zavreči člene višjega reda. Če pri tem upoštevamo še zgornje poenostavitve, dobimo

$$x(y) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE}(1 + \frac{1}{2}(\frac{qE}{cp_0}y)^2 + \ldots - 1) \approx \frac{mc^2}{qE}\frac{q^2E^2y^2}{2c^2(mv_0)^2} = \frac{qE}{2mv_0^2}y^2.$$

Dobili smo dobro znan rezultat iz Newtonove mehanike. V stacionarnem homogenem električnem polju se nabit delec giblje po paraboli.

2.2 Gibanje v stacionarnem homogenem magnetnem polju

Oglejmo si, kako se giblje nabit delec v primeru, ko je $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ in $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Imamo torej stacionarno homogeno magnetno polje, koordinatni sistem pa smo si izbrali tako, da je magnetno polje usmerjeno v smeri osi z.

Poiskati želimo splošno rešitev enačb gibanja (2.1). Pot nas bo vodila takole: najprej bomo ugotovili, da je v našem primeru γ konstanten, enačbe gibanja se bodo poenostavile, našli bomo prvi integral sistema enačb in sistem rešili do konca.

Lorentzov zakon (2.1) se v našem primeru glasi

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2.13}$$

Ali lahko kaj povemo o tem, kako se s časom spreminja velikost vektorja $\mathbf{p}$ oziroma njen kvadrat $|\mathbf{p}|^2 = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$? S pomočjo enačb (2.2) in (2.13) računajmo:

$$\frac{d\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}{dt} = 2\langle \dot{\mathbf{p}}, \mathbf{p} \rangle = 2\langle q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \gamma m\mathbf{v} \rangle = 2q\gamma m\langle \mathbf{v}, \mathbf{B}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Velikost vektorja $\mathbf{p}$ je konstantna. Upoštevajmo (2.2) in (2.3), da dobimo zvezo med velikostjo vektorjev $p = |\mathbf{p}|$ in $v = |\mathbf{v}|$:

$$p^2 = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = \langle \gamma m\mathbf{v}, \gamma m\mathbf{v} \rangle = \gamma^2 m^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \gamma^2 m^2 v^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

oziroma $v^2 = \frac{c^2p^2}{p^2+c^2m^2}$. Zaradi tega je tudi velikost vektorja $\mathbf{v}$ konstantna in zaradi (2.3) je tudi koeficient γ konstanten. S pomočjo četrte enačbe Lorentzovega zakona (2.7) to ugotovimo hitreje: v enačbo vstavimo $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, upoštevamo definicijo polne energije (2.5) in že dobimo, da je γ konstanten.

Enačbo gibanja (2.13) zapišemo ob upoštevanju našega magnetnega polja po komponentah

$$
\begin{aligned}
\frac{d(\gamma m v_x)}{dt} &= qBv_y, \\
\frac{d(\gamma m v_y)}{dt} &= -qBv_x, \\
\frac{d(\gamma m v_z)}{dt} &= 0.
\end{aligned}
$$

Koeficient γ je konstanten, zato je

$$
\begin{aligned}
\gamma m \dot{v}_x &= qBv_y, \\
\gamma m \dot{v}_y &= -qBv_x, \\
\dot{v}_z &= 0.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Prvo enačbo pomnožimo z v_x, drugo z v_y in ju seštejmo. Dobimo $\gamma m(\dot{v}_x v_x + \dot{v}_y v_y) = 0$ oziroma

$$\frac{\gamma m}{2}\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2) = 0.$$

Torej je $v_x^2 + v_y^2$ konstanta gibanja. Označimo jo $v_0^2 := v_x^2 + v_y^2$ in z njo izrazimo

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - v_y^2}. \tag{2.15}$$

To vstavimo v drugo od enačb (2.14), da dobimo

$$\gamma m \dot{v}_y = -qB\sqrt{v_0^2 - v_y^2}.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{dv_y}{\sqrt{v_0^2 - v_y^2}} = -\frac{qB}{\gamma m}\,dt.$$

Integracija nam da

$$\arcsin\frac{v_y}{v_0} = -\frac{qB}{\gamma m}t + \varphi_0$$

oziroma

$$v_y = -v_0\sin(\frac{qB}{\gamma m}t - \varphi_0). \tag{2.16}$$

To vstavimo v (2.15), da dobimo še

$$v_x = v_0\cos(\frac{qB}{\gamma m}t - \varphi_0). \tag{2.17}$$

Iz zadnje od enačb (2.14) dobimo še zadnjo komponento hitrosti

$$v_z = v_{0z}. \tag{2.18}$$

Enačbe (2.16) - (2.18) integriramo in dobimo rešitev naloge, ki smo si jo zastavili:

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \frac{\gamma m v_0}{qB}\sin(\frac{qB}{\gamma m}t - \varphi_0), \\
y &= y_0 + \frac{\gamma m v_0}{qB}\cos(\frac{qB}{\gamma m}t - \varphi_0), \\
z &= z_0 + v_{0z}t.
\end{aligned}$$

Pri tem so φ_0, v_0, v_{0z}, x_0, y_0, z_0 poljubne konstante. V stacionarnem homogenem magnetnem polju se nabit delec giblje po spirali, katere os je vzporedna smeri magnetnega polja in ima polmer $|\frac{\gamma m v_0}{qB}|$. Že prej smo ugotovili, da je hitrost delca konstantna.

V posebnem primeru, ko ima delec komponento hitrosti v smeri magnetnega polja enako nič ($v_{0z} = 0$), dobimo kroženje v ravnini, pravokotni na polje. Delec kroži s krožno frekvenco $\omega = \frac{qB}{\gamma m}$. V nerelativističnem približku, ko je $\gamma \approx 1$, pa je $\omega \approx \frac{qB}{m}$. Imenujemo jo *ciklotronska krožna frekvenca*.

3 Problem dveh teles

Oglejmo si, kako se dve točkasti masi m_1 in m_2 s pripadajočima krajevnima vektorjema $\mathbf{R}_1$ in $\mathbf{R}_2$ gibljeta v trorazsežnem evklidskem vektorskem prostoru. V tem okviru smemo obravnavati tudi gibanje planeta okoli Sonca ali gibanje satelita okrog planeta v primeru, ko smatramo, da so ta nebesna telesa krogle, katerih gostota je odvisna samo od razdalje od središča. V tem primeru je namreč gravitacijsko polje okrog telesa enako, kot če bi bila vsa njegova masa zbrana v njegovem težišču (glej [5]). Problem bomo obravnavali nerelativistično, saj so hitrosti, ki nastopajo v nebesni mehaniki, majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo.

Vpeljimo vektor $\mathbf{R} := \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, ki nam pove lego druge točkaste mase glede na prvo, in naj bo $r := |\mathbf{R}|$. Iz drugega Newtonovega zakona (1.1) in Newtonovega gravitacijskega zakona (1.3) dobimo enačbi gibanja

$$m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}\mathbf{R}, \qquad m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}\mathbf{R}$$

oziroma

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{G_0 m_2}{r^3}\mathbf{R}, \qquad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{G_0 m_1}{r^3}\mathbf{R}.$$

Prvo enačbo odštejmo od druge, da dobimo enačbo

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{G_0(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{R},$$

ki nam pove, kako se drugo telo giblje glede na prvo telo. Enačbo reskalirajmo: uvedimo spremenljivki $\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{R}$ in $\bar{t} = \frac{1}{\beta}t$ s takima α in β, da je $G_0(m_1 + m_2)\beta^2 = \alpha^3$. Označimo $\bar{\mathbf{R}}' := \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{d\bar{t}}$, da lahko zapišemo $\dot{\mathbf{R}} = \frac{\alpha}{\beta^2}\bar{\mathbf{R}}'$ in $\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\alpha}{\beta^2}\bar{\mathbf{R}}''$. Ko vse to upoštevamo v zgornji enačbi, dobimo enačbo gibanja v preprostejši obliki

$$\bar{\mathbf{R}}'' = -\frac{1}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{R}}.$$

Namesto novih oznak $\bar{t}$, $\bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{R}}''$, $\bar{r}$ uporabljajmo raje kar stare oznake t, $\mathbf{R}$, $\ddot{\mathbf{R}}$, r. V tem poglavju bomo torej obravnavali diferencialno enačbo

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Gibanje $\mathbf{R}(t)$, ki je rešitev enačbe (3.1), imenujemo *Keplerjevo gibanje*[1]. Najpomembnejša lastnost sistema (3.1) je, da znamo poiskati kar nekaj količin, ki so vzdolž rešitev konstantne. To so prvi integrali sistema.

[1] Johannes Kepler (1571-1630) je bil nemški astronom in matematik.

Definirajmo energijo gibanja

$$E(\mathbf{R},\dot{\mathbf{R}}) := \frac{1}{2}\langle\dot{\mathbf{R}},\dot{\mathbf{R}}\rangle - \frac{1}{\langle\mathbf{R},\mathbf{R}\rangle^{1/2}}, \tag{3.2}$$

vrtilno količino

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\dot{\mathbf{R}}) := \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}} \tag{3.3}$$

in velikost vrtilne količine

$$G(\mathbf{R},\dot{\mathbf{R}}) := |\mathbf{A}(\mathbf{R},\dot{\mathbf{R}})|. \tag{3.4}$$

Definicije so sicer drugačne od tistih, ki smo jih vajeni pri fiziki, vendar se od njih razlikujejo le po konstantnih faktorjih posameznih členov.

Naj bo $\mathbf{R}(t)$ rešitev sistema (3.1). Z upoštevanjem (3.1) izračunajmo $\dot{E}(t)$ in $\dot{\mathbf{A}}(t)$ vzdolž rešitve:

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \frac{1}{2}2\langle\ddot{\mathbf{R}},\dot{\mathbf{R}}\rangle + \frac{1}{2}\frac{2\langle\dot{\mathbf{R}},\mathbf{R}\rangle}{\langle\mathbf{R},\mathbf{R}\rangle^{3/2}} = -\frac{1}{r^3}\langle\mathbf{R},\dot{\mathbf{R}}\rangle + \frac{1}{r^3}\langle\dot{\mathbf{R}},\mathbf{R}\rangle = 0,\\
\dot{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{R}}\times\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R}\times\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} + \mathbf{R}\times(-\frac{1}{r^3}\mathbf{R}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Smo že našli nekaj prvih integralov. Vzdolž rešitve sistema (3.1) je energija konstantna in vektor vrtilne količine je konstanten; označimo ga s $\mathbf{C}$. V vsakem trenutku t torej velja

$$\mathbf{R}(t)\times\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{C}.$$

Torej v vsakem trenutku vektorja $\mathbf{R}(t)$ in $\dot{\mathbf{R}}(t)$ ležita v ravnini, ki gre skozi izkodišče in je pravokotna na $\mathbf{C}$. Gibanje je ravninsko! Ker je $\mathbf{A}(t)$ konstantna, je tudi velikost vrtilne količine $G(t)$ vzdolž rešitve konstanta in to nenegativna. $G(t)$ je lahko tudi 0. V tem primeru je $\mathbf{R}(t)\times\dot{\mathbf{R}}(t)\equiv\mathbf{0}$, vektorja $\mathbf{R}(t)$ in $\dot{\mathbf{R}}(t)$ sta v vsakem trenutku kolinearna, drugo telo se giblje glede na prvo po premici. Telesi se bosta bodisi ves čas oddaljevali bodisi bosta po nekem času trčili. Kakorkoli že, taka gibanja niso posebno zanimiva in jih ne bomo obravnavali. Odslej naj bo torej $G > 0$.

Sedaj vemo, da je Keplerjevo gibanje ravninsko gibanje. Da ga lažje opišemo, izberimo nov koordinatni sistem z bazo $[\bar{\mathbf{e}}_r,\bar{\mathbf{e}}_b,\bar{\mathbf{e}}_n]$ tako, da smerna vektorja $\bar{\mathbf{e}}_r$ in $\bar{\mathbf{e}}_b$ ležita v ravnini gibanja, vektor $\bar{\mathbf{e}}_r$ pa poleg tega leži še v ravnini (x,y). Uporabimo polarne koordinate. Vektorja $\mathbf{R}(t)$ in $\dot{\mathbf{R}}(t)$ v bazi $[\bar{\mathbf{e}}_r,\bar{\mathbf{e}}_b,\bar{\mathbf{e}}_n]$ zapišemo

$$\mathbf{R}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t)\\ r(t)\sin\theta(t)\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos\theta(t) - r(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)\\ \dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

V običajni bazi $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ pa je

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{M} \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t) \\ r(t)\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \dot{r}(t)\cos\theta(t) - r(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \\ \dot{r}(t)\sin\theta(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

kjer je $\mathbf{M}$ ortogonalna matrika, ki predstavlja zasuk baze $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$ glede na bazo $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ oziroma lego ravnine gibanja v prostoru. $\mathbf{R}(t)$ in $\dot{\mathbf{R}}(t)$ iz (3.6) bomo vstavili v definiciji (3.2) in (3.4). Pri tem nas $\mathbf{M}$ ne moti. Ker je $\mathbf{M}$ ortogonalna transformacija, ohranja skalarni produkt: za vsaka $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$ velja $\langle \mathbf{MX}, \mathbf{MY} \rangle = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$. Poleg tega ohranja tudi dolžine vektorjev in kote med vektorji. Zato tudi velikost vektorskega produkta $|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}| := |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}| \cdot \sin\varphi_{\mathbf{XY}}$ transformacija $\mathbf{M}$ ohrani: $|\mathbf{MX} \times \mathbf{MY}| = |\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|$. Z upoštevanjem teh dveh lastnosti iz (3.2) in (3.4) dobimo

$$\begin{aligned} E(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) &= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{r}, \\ G(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) &= r^2|\dot{\theta}|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Opazimo, da je $\dot{\theta}(t)$ ves čas istega predznaka. Za rešitve $(r(t), \theta(t))$ našega problema namreč priznavamo le gladke, to je zvezno odvedljive, funkcije. Če bi funkcija $\dot{\theta}(t)$ spremenila predznak, bi v nekem trenutku t_0 veljalo $\dot{\theta}(t_0) = 0$ in zato $G(t_0) = 0$. Ker je $G(t)$ na rešitvah konstantna, bi v našem primeru veljalo $G(t) \equiv 0$. Take primere pa smo že izključili.

Če je funkcija $\dot{\theta}$ pozitivna, velja $|\dot{\theta}| = \dot{\theta}$. Če je funkcija $\dot{\theta}$ negativna, namesto baze prostora $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$ izberimo raje bazo $[\bar{\mathbf{e}}_r, -\bar{\mathbf{e}}_b, -\bar{\mathbf{e}}_n]$ in spet uporabimo polarne koordinate. Na ta način dosežemo, da vse ostane enako kot prej, le funkcija $\dot{\theta}$ je sedaj pozitivna. Zato brez škode namesto (3.7) zapišemo

$$G(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) = r^2\dot{\theta},$$

konstanto $G(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$, pripadajočo iskanemu Keplerjevemu gibanju, pa raje označujmo s P_θ. Sistem diferencialnih enačb, ki ga želimo rešiti, je torej

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{r}, \tag{3.8}$$

$$P_\theta = r^2\dot{\theta}, \tag{3.9}$$

kjer sta E in P_θ konstanti.

Ko opazujemo enačbo (3.9), se nečesa spomnimo. Za ploščino $S(t)$, ki jo v času t pomete krajevni vektor do parametrično podane krivulje v polarnih koordinatah od neke začetne lege, velja

$$\dot{S}(t) = \frac{1}{2}r^2(t)\dot{\theta}(t). \tag{3.10}$$

Iz (3.9) zato dobimo $\dot{S}(t) \equiv \frac{P_\theta}{2}$. Dobili smo drugi Keplerjev zakon: zveznica od prvega telesa (na primer Sonca) do drugega telesa (planeta) pokrije v enakih časih enake ploščine.

Rešujmo sistem enačb (3.8), (3.9). Iz enačbe (3.9) izrazimo $\dot{\theta} = P_\theta/r^2$ in to vstavimo v (3.8). V dobljenem sistemu

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}) - \frac{1}{r}, \qquad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{r^2} \tag{3.11}$$

namesto $r(t)$ vpeljimo novo spremenljivko $\rho(t) := \frac{1}{r(t)}$. Upoštevamo, da je $\dot{\rho} = -\frac{\dot{r}}{r^2} = -\dot{r}\rho^2$, in dobimo

$$E = \frac{1}{2}(\frac{\dot{\rho}^2}{\rho^4} + P_\theta^2\rho^2) - \rho, \qquad \dot{\theta} = P_\theta\rho^2. \tag{3.12}$$

Poiščimo funkcijo $\rho(\theta)$. Zanjo iz (3.12) dobimo

$$\rho' := \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\rho^2\sqrt{2(E+\rho) - P_\theta^2\rho^2}}{P_\theta\rho^2} = \frac{\sqrt{2(E+\rho) - P_\theta^2\rho^2}}{P_\theta}$$

oziroma

$$\rho' = \sqrt{\frac{2E}{P_\theta^2} + \frac{2\rho}{P_\theta^2} - \rho^2}. \tag{3.13}$$

Namesto, da to enačbo z ločljivima spremenljivkama integriramo, jo raje odvajajmo:

$$\rho'' = \frac{\frac{2}{P_\theta^2}\rho' - 2\rho\rho'}{2\sqrt{\frac{2E}{P_\theta^2} + \frac{2\rho}{P_\theta^2} - \rho^2}}.$$

Zaradi (3.13) lahko koren v imenovalcu nadomestimo z ρ' in dobimo enačbo harmoničnega oscilatorja

$$\rho'' + \rho = \frac{1}{P_\theta^2}. \tag{3.14}$$

Njena splošna rešitev je

$$\rho = \frac{1}{P_\theta^2} + B\cos(\theta - g), \tag{3.15}$$

kjer sta B in g konstanti. Rešitev in njen odvod $\rho' = -B\sin(\theta - g)$ vstavimo v (3.13), da ugotovimo, kateremu dodatnemu pogoju morata ustrezati konstanti B in g, da bo rešitev (3.15) enačbe (3.14) tudi rešitev prvotne enačbe (3.13). Dobimo

$$B = \frac{\sqrt{1 + 2EP_\theta^2}}{P_\theta^2},$$

tako da je splošna rešitev enačbe (3.13)

$$\rho = \frac{1}{P_\theta^2}(1 + \sqrt{1 + 2EP_\theta^2}\cos(\theta - g)).$$

Upoštevajmo, da je $\rho = 1/r$, in že dobimo rešitev našega problema

$$r = \frac{P_\theta^2}{1 + \sqrt{1 + 2EP_\theta^2}\cos(\theta - g)}. \tag{3.16}$$

To je enačba stožnice. Omejimo se na gibanja z negativno energijo: $E < 0$. V tem primeru je $\sqrt{1 + 2EP_\theta^2} < 1$ in je naša stožnica kar elipsa. Dobili smo prvi Keplerjev zakon.

Vpeljimo količine, ki jih običajno uporabljamo pri elipsi:

$$\begin{aligned} v &:= \theta - g \qquad \textit{prava anomalija}, \\ e &:= \sqrt{1 + 2EP_\theta^2} \qquad \textit{ekscentričnost}, \\ a &:= \frac{P_\theta^2}{1 - \sqrt{1 + 2EP_\theta^2}^2} = \frac{P_\theta^2}{-2EP_\theta^2} = -\frac{1}{2E} \qquad \textit{velika polos}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Z njimi enačbo (3.16) zapišemo v običajni polarni obliki

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}. \tag{3.18}$$

Vemo, da je mala polos elipse $b = a\sqrt{1 - e^2}$, in da je ploščina elipse

$$\begin{aligned} S &= \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - e^2} = \pi a^2\sqrt{-2EP_\theta^2} = \\ &= \pi(-2E)^{-2}\sqrt{-2EP_\theta^2} = \pi P_\theta(-\frac{1}{2E})^{3/2} = \pi P_\theta a^{3/2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Naj bo T obhodna doba, v kateri se drugo telo vrne okrog prvega po eliptičnem tiru nazaj v prvotno lego. Ob upoštevanju (3.10) lahko zapišemo ploščino elipse

$$\int_0^T \frac{1}{2}r^2(t)\dot{\theta}(t)\,dt = S.$$

Upoštevajmo (3.9) in (3.19), da dobimo zvezo

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{2}P_\theta\,dt &= \pi P_\theta a^{3/2}, \\ \frac{1}{2}P_\theta T &= \pi P_\theta a^{3/2}, \\ T^2 &= 4\pi^2 a^3. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dobili smo tretji Keplerjev zakon.

Enačba (3.16) oziroma (3.18) nam pove, po kakšnem tiru se drugo telo giblje glede na prvo. O tem, kako se s časom spreminja lega drugega telesa vzdolž tira, pa nam govori enačba (3.9), $\dot{\theta} = P_\theta/r^2$, kjer je $r(\theta)$ znana funkcija (3.16). Uporabljajmo nove oznake iz (3.17) in namesto P_θ raje spet pišimo G. S tem dobimo identiteto

$$G = P_\theta = \sqrt{a(1-e^2)}, \tag{3.21}$$

enačbo tira (3.18) lahko zapišemo

$$r = \frac{G^2}{1 + e\cos v}, \tag{3.22}$$

enačba (3.9) pa preide v

$$\dot{v} = \frac{G}{r^2}. \tag{3.23}$$

V enačbo (3.23) vstavimo r iz (3.22), da dobimo diferencialno enačbo, kateri zadošča prava anomalija,

$$\dot{v} = \frac{(1 + e\cos v)^2}{G^3}. \tag{3.24}$$

Da bi jo rešili, vpeljimo novo spremenljivko. Naj bo u kot, za katerega velja

$$\cos u = \frac{e + \cos v}{1 + e\cos v}, \qquad \sin u = \frac{1 - e\cos u}{\sqrt{1-e^2}} \sin v. \tag{3.25}$$

Na ta način je vrednost spremenljivke (na intervalu $[0, 2\pi)$) enolično določena. Definirani kot u imenujemo *ekscentrična anomalija*. Prva enačba v (3.25) nam da

$$1 + e\cos v = \frac{e^2 - 1}{e\cos u - 1}. \tag{3.26}$$

Z uporabo enačb (3.25) in enačbe (3.26) dobimo

$$\frac{du}{dv} = \frac{1 - e\cos u}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{3.27}$$

Enačbo (3.24) v novih spremenljivkah najprej zapišemo

$$\dot{u} = \frac{(1 + e\cos v)^2}{G^3} \cdot \frac{du}{dv},$$

po vstavitvi (3.27) in upoštevanju (3.26) pa

$$\dot{u} = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{G^3(1 - e\cos u)}.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama

$$\int (1 - e\cos u)\, du = \int (\frac{\sqrt{1-e^2}}{G})^3\, dt.$$

Njena rešitev je

$$u - e\sin u = (\frac{\sqrt{1-e^2}}{G})^3 (t - t_0), \tag{3.28}$$

kjer je t_0 konstanta. Preko Keplerjeve enačbe vpeljimo novo spremenljivko

$$\ell := u - e\sin u, \tag{3.29}$$

ki jo imenujemo *srednja anomalija*. V (3.28) preberemo, da je srednja anomalija linearna funkcija časa

$$\ell = (\frac{\sqrt{1-e^2}}{G})^3 (t - t_0). \tag{3.30}$$

Če hočemo ugotoviti, kako je od časa odvisna ekscentrična anomalija, jo je treba izluščiti iz enačbe (3.29). Zveza, ki jo dobimo,

$$u = \ell + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu} J_\nu(\nu e) \sin \nu\ell, \tag{3.31}$$

ni elementarna. Njeno izpeljavo si lahko ogledamo v [10]. Ko združimo enačbe (3.26), (3.31) in (3.30), dobimo funkcijo $v(t)$, ki nam pove, kako se vzdolž tira s časom spreminja lega drugega telesa glede na prvo telo.

Naš pristop k reševanju problema dveh teles ni edini možen. Mi smo si pomagali s tem, da smo najprej ugotovili, da sta vektor vrtilne količine in energija konstanti gibanja. V učbenikih [6] in [10] pa je opisana pot, kjer najprej ugotovimo, da sta vektor vrtilne količine in krajevni vektor perihelija konstanti gibanja. Pri tem izraz *perihelij* označuje točko na tiru drugega telesa, ki je najbližja prvemu telesu - Soncu.

3.1 Fazni portret

Problem dveh teles opisuje sistem treh diferencialnih enačb drugega reda (3.1). Zato je fazni prostor, ki pripada temu sistemu, 6-dimenzionalen. Oglejmo si, kako lahko poiščemo invariantne množice sistema (3.1) tudi v primeru, če sistem ne bi znali v celoti rešiti.

Ko sistem rešujemo, ponavadi večkrat spremenljivke sistema z difeomorfizmom preslikamo v nove spremenljivke. Pri tem ostaja fazni portret v topološkem smislu enak prvotnemu. Zato si s primerno izbiro novih koordinat lahko olajšamo pogled na fazni portret.

Sistem (3.1) lahko zapišemo kot sistem prvega reda

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}, \qquad \dot{\mathbf{V}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{R}, \tag{3.32}$$

kjer nam $\mathbf{V} = (v_x, v_y, v_z)$ označuje hitrost telesa. Za gibanja, ki so njegove rešitve, smo najprej ugotovili, da so ravninska. V tem razdelku brez škode za splošnost predpostavimo, da je baza $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ prostora $\mathbb{R}^3$ postavljena tako, da vektorja $\mathbf{e}_x$ in $\mathbf{e}_y$ ležita v ravnini gibanja. Še bolj natančno: bazi $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$ in $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ naj kar sovpadata. Matrika $\mathbf{M}$ je v tem primeru identiteta $\mathbf{I}$. Pri teh predpostavkah vstavimo $\mathbf{R}(t)$ in $\dot{\mathbf{R}}(t)$ iz (3.6) v sistem (3.32). Dobimo sistem

$$\begin{aligned}
\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= v_x, \\
\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= v_y, \\
\dot{v}_x &= -\frac{1}{r^3} r\cos\theta, \\
\dot{v}_y &= -\frac{1}{r^3} r\sin\theta,
\end{aligned}$$

poleg tega pa imamo še dve konstanti, ki določata nagnjenost ravnine gibanja v prostoru. Predelajmo sistem v običajno obliko

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{r}(v_y\cos\theta - v_x\sin\theta), \\
\dot{v}_x &= -\frac{\cos\theta}{r^2}, \\
\dot{v}_y &= -\frac{\sin\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

Ker je vektorsko polje, ki pripada temu sistemu, tudi funkcija spremenljivke θ, ki je definirana do prištevanja večkratnika števila 2π natančno, fazni prostor sistema "navijemo"; podobno kot navijemo fazno ravnino na fazni valj.

Z uvajanjem novih spremenljivk smo naš sistem prevedli še naprej na sistem (3.11), kjer sta E in P_θ konstanti, poleg njiju pa imamo še že omenjeni konstanti, ki določata nagnjenost ravnine gibanja. Prvo enačbo v (3.11) odvajamo in, ker je $\dot{E} = 0$, dobimo

$$\dot{r}(\ddot{r} - \frac{P_\theta^2}{r^3} + \frac{1}{r^2}) = 0.$$

Če je $\dot{r} \equiv 0$, potem je Keplerjevo gibanje kar kroženje. Če $\dot{r} \not\equiv 0$, potem je gibanje določeno z Newtonovo enačbo

$$\ddot{r} = -(\frac{1}{r^2} - \frac{P_\theta^2}{r^3}). \tag{3.33}$$

Če uvedemo spremenljivko $P_r := \dot{r}$, dobimo ustrezni sistem v fazni ravnini (r, P_r):

$$\dot{r} = P_r, \qquad \dot{P}_r = -\frac{1}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{r^3}. \tag{3.34}$$

To je kanonski sistem z energijo

$$E = H(r, P_r) = \frac{1}{2}(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2}) - \frac{1}{r}. \tag{3.35}$$

Dobili smo enačbo enoparametrične družine faznih tirov. Pri obravnavi sistema (3.34) si pomagajmo z lastnostmi faznih portretov konzervativnih sistemov, ki jih najdemo v učbeniku [6]. Abscisna os je simetrijska os faznega portreta (glej (3.35)). Fazni tiri sečejo abscisno os pod pravim kotom (glej (3.34)). Smer gibanja na zgornji polravnini je od leve proti desni, smer gibanja na spodnji polravnini pa od desne proti levi (glej prvo enačbo v (3.34)). Točke mirovanja dobimo iz pogoja $\dot{r} = 0$, $\dot{P}_r = 0$. Dobimo, da ima edina negibna točka koordinate $(r, P_r) = (P_\theta^2, 0)$ in energijo $-1/(2P_\theta^2)$. Iz (3.33) dobimo potencialno energijo

$$V(r) = \int_\infty^r (\frac{1}{r^2} - \frac{P_\theta^2}{r^3})\, dr = -\frac{1}{r} + \frac{P_\theta^2}{2r^2},$$

katere prva dva odvoda sta

$$V'(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{P_\theta^2}{r^3}, \qquad V''(r) = \frac{-2}{r^3} + \frac{3P_\theta^2}{r^4}.$$

Točka mirovanja $(P_\theta^2, 0)$ je stacionarna točka potencialne energije, $V'(P_\theta^2) = 0$, ne vemo pa še, kakšna. Iz $V''(P_\theta^2) = 1/P_\theta^6 > 0$ izvemo, da ima potencialna energija v točki mirovanja minimum. Taka točka mirovanja je v faznem portretu center, obkrožen s periodičnimi faznimi tiri. Vprašajmo se še, pri katerih r posamezen fazni tir seka abscisno os. V enačbo (3.35) vstavimo $P_r = 0$ in dobimo kvadratno enačbo

$$2Er^2 + 2r - P_\theta^2 = 0 \tag{3.36}$$

z rešitvijo

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2EP_\theta^2}}{2E}.$$

Pri $-1/(2P_\theta^2) < E < 0$ ima enačba dve pozitivni rešitvi. Tem energijam torej ustrezajo omejena Keplerjeva gibanja. Pri $E \geq 0$ ima enačba (3.36) eno samo pozitivno rešitev. V mejnem primeru, ko je $E = 0$, dobimo neomejeno gibanje, zato so tudi gibanja pri $E > 0$ neomejena. Fazni tir pri $E = 0$ je torej separatrisa, ki ločuje območje z omejenimi gibanji od območja z neomejenimi gibanji. Separatrisa

Slika 3.1: Fazni portret sistema (3.34)

prečka r-os pri $r = P_\theta^2/2$. Z uporabo enačbe (3.35) fazni portret sistema (3.34) tudi upodobimo (glej sliko 3.1).

Spet se vprašajmo, kakšen je fazni portret sistema (3.1) v 6-dimenzionalnem faznem prostoru. Omejimo se na fazne tire z negativno energijo oziroma na omejena Keplerjeva gibanja. V sistemu (3.11) smo namesto prve enačbe in enačbe $\dot{E} = 0$ zapisali enačbi (3.34). Tako je celotna množica diferencialnih enačb za Keplerjevo gibanje sistem prvega reda

$$\dot{r} = P_r, \qquad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{r^2}, \qquad \dot{P}_r = \frac{1}{r^2}(\frac{P_\theta^2}{r} - 1), \qquad \dot{P}_\theta = 0. \tag{3.37}$$

Poleg sistema enačb imamo še dve konstanti, ki določata nagnjenost ravnine gibanja. Ti dve konstanti in konstanta P_θ nam dajo foliacijo faznega prostora, ki je sestavljena iz "3-dimenzionalnih" invariantnih množic. V vsaki invariantni množici so fazni tiri pokorni sistemu

$$\dot{r} = P_r, \qquad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{r^2}, \qquad \dot{P}_r = \frac{1}{r^2}(\frac{P_\theta^2}{r} - 1).$$

Zato smemo opazovati fazni portret le v trorazsežnem prostoru (r, P_r, θ). Projekcijo faznih tirov v tem prostoru na ravnino (r, P_r) že imamo - prikazuje jo slika 3.1.

Vprašajmo se, kakšna je invariantna množica v prostoru (r, P_r, θ), ki se projicira v enega od periodičnih faznih tirov ravnine (r, P_r). Vemo, da se kot θ vzdolž faznih tirov povečuje, saj je $\dot{\theta} > 0$ (glej str. 20). Fazni tiri so torej nekakšne spirale, ki se projicirajo na periodični fazni tir v ravnini (r, P_r). Vsako stanje sistema, ki pripada zgoraj omenjeni invariantni množici, tako lahko opišemo z dvema podatkoma: s polarnim kotom, ki ustreza točki na periodičnem faznem tiru ravnine (r, P_r), kamor se projicira stanje sistema, in s podatkom θ. Torej je invariantna množica v topološkem smislu valj. Ker pa smo na strani 25 ugotovili, da fazni prostor lahko vzdolž spremenljivke θ navijemo, se valj navije nase in dobimo 2-dimenzionalni torus.

Tako smo ugotovili, da ima fazni prostor foliacijo, sestavljeno iz invariantnih dvodimenzionalnih torusov. To nam daje upanje, da nam bo za Keplerjev sistem (3.1) uspelo definirati akcijsko-kotne koordinate. To pa bi nam omogočilo, da bi tudi obnašanje perturbiranega sistema postalo vidno.

4 Moteno gibanje dveh teles

Vprašajmo se, kako se giblje na primer Luna okrog Zemlje, če na nebesni telesi deluje še privlačna sila Sonca, privlačna sila drugega planeta, ali pa sila zaradi dejstva, da Zemlja ni pravilna krogla.

Zgodbo začnimo tako kot v prejšnjem poglavju, le da sedaj dovoljujemo še dodatni sili: $\mathbf{F}_1$, ki deluje na prvo telo, in $\mathbf{F}_2$, ki deluje na drugo telo. Imejmo masni točki m_1 s krajevnim vektorjem $\mathbf{R}_1$ in m_2 s krajevnim vektorjem $\mathbf{R}_2$ in naj bo $\mathbf{R} := \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1, \quad r := |\mathbf{R}|$. Za obe masni točki zapišemo drugi Newtonov zakon

$$m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}_1, \qquad m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}_2, \tag{4.1}$$

kjer smo upoštevali medsebojno privlačnost (1.3) in dodatni sili. Prvo enačbo delimo z m_1, drugo z m_2 in potem prvo enačbo odštejemo od druge, da dobimo

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{G_0(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}, \tag{4.2}$$

kjer je $\mathbf{F} = \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_2 - \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_1$. Enačba nam pove zakonitost, po kateri se drugo telo giblje glede na prvo. Enačbo reskalirajmo tako kot v prejšnjem poglavju z novima spremenljivkama $\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{R}$, $\bar{t} = \frac{1}{\beta}t$, kjer naj velja $G_0(m_1 + m_2)\beta^2 = \alpha^3$. Dobimo enačbo gibanja v preprostejši obliki

$$\bar{\mathbf{R}}'' = -\frac{1}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{F}},$$

kjer je $\bar{\mathbf{F}} = \frac{\beta^2}{\alpha}\mathbf{F}$. Namesto novih oznak $\bar{t}$, $\bar{\mathbf{R}}$, $\bar{\mathbf{R}}''$, $\bar{r}$, $\bar{\mathbf{F}}$ uporabimo raje kar stare oznake t, $\mathbf{R}$, $\ddot{\mathbf{R}}$, r, $\mathbf{F}$. Obravnavali bomo torej diferencialno enačbo

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}. \tag{4.3}$$

Problem, ki ga obravnavamo, spada v nebesno mehaniko. Najboljši temelj za njeno obravnavo daje teorija hamiltonskih sistemov. V transformacijski teoriji za hamiltonske sisteme je dokazano, da so transformacije, ki jih bomo uporabili na enačbi (4.3), posebne koordinatne transformacije z imenom *kanonske transformacije*. Te imajo posebno lastnost: transformirati je treba le Hamiltonian; transformirane diferencialne enačbe dobimo tako, da zapišemo kanonske enačbe transformiranega Hamiltoniana. Vendar je za sodobno obravnavo transformacijske teorije za hamiltonske sisteme potrebno poznavanje simplektične geometrije. Naša pot bo drugačna, čeprav manj elegantna. Koordinate bomo na običajen način nadomestili z novimi koordinatami - Delaunayevimi elementi[1].

[1] Charles Eugene Delaunay (1816-1872) je bil francoski matematik in astronom.

Zapišimo diferencialno enačbo drugega reda (4.3) kot sistem prvega reda

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}, \qquad \dot{\mathbf{V}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}. \tag{4.4}$$

Vektorsko polje tega sistema je definirano na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Sedaj bomo postopoma definirali nove spremenljivke na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, da bomo prišli do Delaunayevih elementov. Nazadnje bi v Delaunayevih spremenljivkah radi zapisali enačbe (4.4).

Tako kot v prejšnjem poglavju definirajmo energijo $E : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \frac{1}{2}\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle - \frac{1}{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle^{1/2}}, \tag{4.5}$$

vrtilno količino

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$$

in velikost vrtilne količine

$$G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := |\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|.$$

Če je $t \mapsto (\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t))$ rešitev sistema (4.4), potem je

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \frac{d}{dt}E(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle - \frac{1}{\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle^{1/2}}) = 2\frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{V}}, \mathbf{V} \rangle + \frac{1}{2}\frac{2\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle}{\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle^{3/2}} = \\
&= \langle -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}, \mathbf{V} \rangle + \frac{1}{r^3}\langle \mathbf{V}, \mathbf{R} \rangle = \langle \mathbf{F}, \mathbf{V} \rangle, \qquad (4.6) \\
\dot{\mathbf{A}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \mathbf{V}) = \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \times \mathbf{V} + \mathbf{R} \times (-\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}) = \\
&= -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} \times \mathbf{R} + \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Že v prejšnjem poglavju smo ugotovili, da v primeru, ko je $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, rešitev leži v ravnini, ki je pravokotna na konstanten vektor $\mathbf{A}$. V tem primeru se pripadajoča ravnina, pravokotna na $\mathbf{A}$, imenuje *pritisnjena ravnina*. To ime bomo uporabljali za ravnino, pravokotno na $\mathbf{A}$, tudi v splošnem, ko $\mathbf{A}$ ni konstanten in se ravnina s časom spreminja. V vsakem trenutku ta ravnina vsebuje tir Keplerjevega gibanja, do katerega bi prišlo, če od tistega trenutka dalje sila $\mathbf{F}$ ne bi bila več prisotna. Ta tir imenujemo *pritisnjeni Keplerjev tir*. Slika 4.1 naj nam služi za ponazoritev pritisnjenega Keplerjevega tira in kotov, povezanih z Delaunayevimi elementi.

4.1 Pritisnjene koordinate

Postopoma definirajmo nove spremenljivke, odvisne od $\mathbf{R}$ in $\dot{\mathbf{R}}$: bazo $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$, bazo $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$, kote i, h, θ, ki določajo medsebojno lego baz, in še ortogonalni

Slika 4.1: Pritisnjeni Keplerjev tir v prostoru

matriki $\mathbf{M}$ in $\mathbf{N}$, ki bosta prehodni matriki med bazami. Ves čas si pomagajmo s sliko 4.1.

Definirajmo tri funkcije $\mathbf{e}_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{e}_b,\ \mathbf{e}_n : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ z

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(\mathbf{X}) &= \frac{1}{|\mathbf{X}|}\mathbf{X}, \\ \mathbf{e}_n(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= \frac{1}{G(\mathbf{X},\mathbf{Y})}\mathbf{X}\times\mathbf{Y}, \\ \mathbf{e}_b(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= \mathbf{e}_n(\mathbf{X},\mathbf{Y})\times\mathbf{e}_r(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Če sta $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathbb{R}^3$ nekolinearna vektorja, potem vektorji $\mathbf{e}_r(\mathbf{X})$, $\mathbf{e}_b(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ in $\mathbf{e}_n(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tvorijo ortonormirano bazo v $\mathbb{R}^3$. Če izračunamo vrednosti teh funkcij vzdolž rešitve $t\mapsto(\mathbf{R},\dot{\mathbf{R}})$, dobimo

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r}\mathbf{R}, \qquad \mathbf{e}_n = \frac{1}{G}\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \qquad \mathbf{e}_b = \frac{1}{rG}(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})\times\mathbf{R} = \frac{1}{rG}(r^2\dot{\mathbf{R}} - \langle\dot{\mathbf{R}},\mathbf{R}\rangle\mathbf{R}). \tag{4.8}$$

Če pritisnjena ravnina ne sovpada z ravnino (x,y), potem seka to ravnino v premici z imenom *vozelna črta*. Vozelna črta seveda leži v pritisnjeni ravnini in je pravokotna na os z. Vektor na vozelni črti $\mathbf{e}_{an}$ lahko iščemo z nastavkom

$\mathbf{e}_{an} = \alpha\mathbf{e}_r + \beta\mathbf{e}_b$ in upoštevamo $0 = \langle\mathbf{e}_{an}, \mathbf{e}_z\rangle = \alpha\langle\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z\rangle + \beta\langle\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_z\rangle$. Če izberemo $\alpha = \langle\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_z\rangle$, dobimo $\beta = -\langle\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z\rangle$ in

$$\mathbf{e}_{an} = \langle\mathbf{e}_b, \mathbf{e}_z\rangle\mathbf{e}_r - \langle\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z\rangle\mathbf{e}_b.$$

Vektor $\mathbf{e}_{an}$ normiramo

$$\bar{\mathbf{e}}_r := \frac{1}{|\mathbf{e}_{an}|}\mathbf{e}_{an}$$

in definiramo še

$$\bar{\mathbf{e}}_n := \mathbf{e}_n, \qquad \bar{\mathbf{e}}_b := \bar{\mathbf{e}}_n \times \bar{\mathbf{e}}_r.$$

Vektorja $\bar{\mathbf{e}}_r$ in $\bar{\mathbf{e}}_b$ napenjata pritisnjeno ravnino. Če nek vektor razvijemo v bazi $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$, pravimo, da smo ga zapisali v *pritisnjenih koordinatah.*

Naj bo $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ običajna, fiksna baza kartezičnega koordinatnega sistema v $\mathbb{R}^3$. Naj kot i na sliki 4.1 meri naklon pritisnjene ravnine glede na os z. Potem je

$$\cos i = \langle\bar{\mathbf{e}}_n, \mathbf{e}_z\rangle = \langle\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_z\rangle. \tag{4.9}$$

Kot dvižnega vozla h med osjo x in vozelno črto je dan z enačbo

$$\cos h = \langle\bar{\mathbf{e}}_r, \mathbf{e}_x\rangle. \tag{4.10}$$

Če se zgodi, da pritisnjena ravnina sovpade z ravnino (x, y), nimamo naravne definicije kota h. Vendar je na tiru kot $h(t)$ zvezna funkcija. V točki, kjer je $i(t) = 0$, je kot h definiran, kadar obstaja zvezna razširitev funkcije $h(t)$ na to točko.

Izračunajmo ortogonalno transformacijo glede na Eulerjeva kota[2] i in h. To dosežemo v dveh korakih: z rotacijo okrog osi z za kot h, ki ji sledi rotacija okrog zasukane osi x za kot i. Matrika rotacije okrog osi z je

$$\mathbf{M}(h) := \begin{pmatrix} \cos h & -\sin h & 0 \\ \sin h & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da zasučemo točko okrog nove, zasukane osi x (po rotaciji z $\mathbf{M}(h)$), jo zasukajmo nazaj v prvotne koordinate, zasučimo okrog stare osi x za kot i in jo potem zasukajmo naprej. Rotacija okrog osi x je dana z

$$\mathbf{M}(i) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Tako je rotacija, ki jo iščemo,

$$\mathbf{M} := (\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(i)\mathbf{M}^{-1}(h))\mathbf{M}(h) = \mathbf{M}(h)\mathbf{M}(i).$$

[2]Leonhard Euler (1707-1783) je bil švicarski matematik.

Če običajne koordinate označimo z x, y, z, pritisnjene koordinate pa z x', y', z', potem je transformacija $\mathbf{M}$ dana z

$$\begin{aligned} x &= x'\cos h - y'\sin h\cos i + z'\sin h\sin i, \\ y &= x'\sin h + y'\cos h\cos i - z'\cos h\sin i, \\ z &= y'\sin i + z'\cos i. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Po konstrukciji ima normala $\bar{\mathbf{e}}_n$ pritisnjene ravnine smer in usmeritev osi z'.

V pritisnjeni ravnini kot med $\bar{\mathbf{e}}_r$ in $\mathbf{R}$ (oziroma med $\bar{\mathbf{e}}_r$ in $\mathbf{e}_r$) označimo s θ. Tako imamo vpeljane enake oznake kot v prejšnjem poglavju. Če koordinate vektorja, razvitega v bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$, označimo z x'', y'', z'', potem prehod iz teh koordinat v pritisnjene koordinate zapišemo

$$\begin{aligned} x' &= x''\cos\theta - y''\sin\theta, \\ y' &= x''\sin\theta + y''\cos\theta, \\ z' &= z''. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Združimo (4.11) in (4.12), pa lahko zapišemo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{N} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

kjer je

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos h & -\sin h & 0 \\ \sin h & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos h\cos\theta - \sin h\cos i\sin\theta & -\cos h\sin\theta - \sin h\cos i\cos\theta & \sin h\sin i \\ \sin h\cos\theta + \cos h\cos i\sin\theta & -\sin h\sin\theta + \cos h\cos i\cos\theta & -\cos h\sin i \\ \sin i\sin\theta & \sin i\cos\theta & \cos i \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Ker sta $\mathbf{M}$ in $\mathbf{N}$ ortogonalni matriki, njuna inverza dobimo s transponiranjem.

Ker imamo oznake vpeljane enako kot v prejšnjem poglavju, lahko vse rezultate o pritisnjenem Keplerjevem tiru preberemo kar tam. Razlika je le v tem, da sta bila v prejšnjem poglavju, v neperturbiranem primeru, pritisnjena ravnina in pritisnjeni Keplerjev tir (elipsa) stalna, elementi Keplerjevega tira (velika polos, mala polos,...) pa so bili konstantni. V perturbiranem primeru pa se vsi ti elementi s časom spreminjajo.

Tako imamo sedaj na $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definiranih že mnogo funkcij: bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$ in $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$, kote i, h, θ, matriki $\mathbf{M}$ in $\mathbf{N}$, energijo E, velikost vrtilne količine G, dolžino krajevnega vektorja r, zaradi (3.17) tudi e in a, zaradi (3.18) v, zaradi (3.25) u, zaradi (3.29) ℓ in zaradi prve enačbe v (3.17) tudi g. Definirali pa bomo še nove.

4.2 Delaunayevi elementi

V tem razdelku bomo analizirali vpliv sile $\mathbf{F}$ na Keplerjev tir z vpeljavo novih spremenljivk z imenom *Delaunayevi elementi.* Te koordinate so take, da ima v njih sistem (4.3) uporabno, posebno obliko, prikazano v (4.35).

Spomnimo se baze $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$, prikazane v (4.8), in po njej razvijmo silo

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_b\mathbf{e}_b + F_n\mathbf{e}_n.$$

Funkciji L, $G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dve komponenti Delaunayeve koordinatne transformacije definiramo z

$$L(X,Y) := (-2E(X,Y))^{-1/2}, \qquad G(X,Y) := |\mathbf{A}(X,Y)|, \tag{4.15}$$

kjer je E energija in $\mathbf{A}$ vrtilna količina. Uporabimo formuli (4.6) in (4.7), da dobimo

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= -\frac{1}{2}(-2E)^{-3/2}(-2\dot{E}) = (-2E)^{-3/2}\dot{E} = L^3\langle \mathbf{F}, \dot{\mathbf{R}}\rangle, \\
\dot{G} &= \frac{d}{dt}\langle \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\rangle^{1/2} = \frac{1}{2}\langle \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\rangle^{-1/2} 2\langle \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \frac{d}{dt}(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})\rangle = \\
&= \frac{1}{G}\langle \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{A}}\rangle = \frac{1}{G}\langle \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}\times\mathbf{F}\rangle.
\end{aligned}$$

Z uporabo (4.8) sledi

$$\begin{aligned}
\dot{G} &= \frac{1}{G}\langle \mathbf{R}\times\mathbf{F}, \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\rangle = \frac{1}{G}\langle \mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\rangle = \frac{1}{G}\langle \mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R}, \mathbf{F}\rangle = \\
&= \frac{1}{G}\langle (\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})\times\mathbf{R}, \mathbf{F}\rangle = \frac{1}{G}\langle rG\mathbf{e}_b, \mathbf{F}\rangle = r\langle \mathbf{e}_b, \mathbf{F}\rangle = rF_b. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Odvajajmo identiteto $r^2 = \langle \mathbf{R}, \mathbf{R}\rangle$, da dobimo $r\dot{r} = \langle \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}\rangle$. To upoštevamo v zadnji od enačb (4.8), da dobimo

$$\mathbf{e}_b = \frac{1}{rG}(r^2\dot{\mathbf{R}} - \dot{r}r\mathbf{R}).$$

Od tod izrazimo $\dot{\mathbf{R}}$, upoštevajmo prvo enačbo v (4.8) in dobimo

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \frac{G}{r}\mathbf{e}_b. \tag{4.17}$$

To vstavimo v izraz za $\dot{L}$ zgoraj, da dobimo

$$\dot{L} = L^3(\dot{r}F_r + \frac{G}{r}F_b). \tag{4.18}$$

Še $\dot{r}$ bi radi izrazili v drugačni obliki. Iz (3.17) dobimo

$$G = P_\theta = \sqrt{a(1-e^2)}, \tag{4.19}$$

ob pomoči definicije spremenljivke L pa še

$$L = \sqrt{a}, \qquad e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}. \tag{4.20}$$

Če poleg (3.17) uporabimo definicijo spremenljivke E in (4.17) ter (4.19), dobimo

$$-\frac{1}{2a} = E = \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{a(1-e^2)}{r^2}\right) - \frac{1}{r}.$$

Od tod izrazimo $\dot{r}$ in izraz zanj zapišimo v obliki

$$\dot{r}^2 = -\frac{1}{ar^2}(r - a(1-e))(r - a(1+e)).$$

Vanj vstavimo r iz formule (3.18) in upoštevajmo (4.19), da dobimo

$$\dot{r} = \frac{e \sin v}{G}. \tag{4.21}$$

To vstavimo v (4.18), da dobimo diferencialno enačbo, ki ji zadošča L, poleg te pa zapišimo še (4.16), ki ji zadošča G:

$$\dot{L} = L^3 (F_r \frac{e}{G} \sin v + F_b \frac{G}{r}), \qquad \dot{G} = r F_b. \tag{4.22}$$

Delaunayeva spremenljivka H je definirana s

$$H := \langle \mathbf{A}, \mathbf{e}_z \rangle = G \langle \frac{1}{G} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_z \rangle = G \cos i, \tag{4.23}$$

kjer je i naklon pritisnjene ravnine (glej enačbo (4.9)). Dobiti želimo izraz za $\dot{H}$. V ta namen se spomnimo transformacije (4.13). V bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$ imajo bazni vektorji koordinate $\mathbf{e}_r = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_b = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 1)$. S pomočjo (4.13) in (4.14) jih zapišimo v običajni bazi $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos h \cos\theta - \sin h \cos i \sin\theta \\ \sin h \cos\theta + \cos h \cos i \sin\theta \\ \sin i \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_b = \begin{pmatrix} -\cos h \sin\theta - \sin h \cos i \cos\theta \\ -\sin h \sin\theta + \cos h \cos i \cos\theta \\ \sin i \cos\theta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_n &= \begin{pmatrix} \sin h \sin i \\ -\cos h \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Sedaj odvajajmo obe strani identitete $G\mathbf{e}_n = \mathbf{A}$, uporabimo (4.7), (4.16), prvo od enačb (4.8) in identitete, ki veljajo za bazne vektorje $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_b$, $\mathbf{e}_n$:

$$\begin{aligned} G\dot{\mathbf{e}}_n &= \dot{\mathbf{A}} - \dot{G}\mathbf{e}_n \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{F} - rF_b\mathbf{e}_n \\ &= r\mathbf{e}_r \times \mathbf{F} - rF_b\mathbf{e}_n \\ &= r(F_b\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_b + F_n\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_n) - rF_b\mathbf{e}_n \\ &= -rF_n\mathbf{e}_b. \end{aligned} \tag{4.25}$$

V (4.25) vstavimo vektorja $\mathbf{e}_n$ in $\mathbf{e}_b$ iz (4.24), potem pa izenačimo komponente. Ko izenačimo tretji komponenti, dobimo

$$\frac{di}{dt} = \frac{rF_n}{G}\cos\theta. \tag{4.26}$$

Ko to vstavimo v drugo komponento, dobimo še

$$\dot{h} = \frac{rF_n \sin\theta}{G\sin i}.$$

Dobili smo diferencialno enačbo za h, ki je tudi eden od Delaunayevih elementov. Uporabimo definicijo (4.23) skupaj s (4.26) in drugo enačbo v (4.22), da dobimo še izraz za odvod spremenljivke H:

$$\dot{H} = \dot{G}\cos i - G\sin i\frac{di}{dt} = rF_b\cos i - G\sin i\frac{rF_n}{G}\cos\theta = r(F_b\cos i - F_n\sin i\cos\theta).$$

Spomnimo se prve enačbe v (3.17)

$$v = \theta - g. \tag{4.27}$$

Kakšen je pomen spremenljivke g? V enačbi elipse (3.16) vidimo, da v trenutku, ko ima θ vrednost g, krajevni vektor kaže proti točki na tiru, ki je najbližja gorišču, to je proti periheliju oziroma perigeju. Zato imenujemo spremenljivko g *argument perihelija*. Tudi ta spremenljivka je ena od Delaunayevih elementov. Da dobimo izraz za njen odvod, moramo najprej poiskati odvoda spremenljivk θ in v.

Enačbo (4.17) skalarno množimo z $\mathbf{e}_z$, ob tem pa upoštevajmo identiteti $\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z\rangle = \sin i \sin\theta$ in $\langle \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_z\rangle = \sin i\cos\theta$, dobljeni iz (4.24). Dobimo

$$\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_z\rangle = \dot{r}\sin i\sin\theta + \frac{G}{r}\sin i\cos\theta.$$

Z upoštevanjem (4.26) dobimo še en podoben izraz

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_z\rangle &= \frac{d}{dt}(\langle \mathbf{R}, \mathbf{e}_z\rangle) = \frac{d}{dt}(r\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z\rangle) = \frac{d}{dt}(r\sin i\sin\theta) = \\ &= \dot{r}\sin i\sin\theta + r\cos i\frac{di}{dt}\sin\theta + r\dot{\theta}\sin i\cos\theta = \\ &= \dot{r}\sin i\sin\theta + r\cos i\frac{rF_n}{G}\cos\theta\sin\theta + r\dot{\theta}\sin i\cos\theta. \end{aligned}$$

Ko izenačimo oba izraza, dobimo formulo

$$\dot{\theta} = \frac{G}{r^2} - \frac{rF_n \cos i \sin\theta}{G \sin i}. \tag{4.28}$$

Iz enačb (3.18) in (4.19) dobimo

$$r = \frac{G^2}{1 + e\cos v}. \tag{4.29}$$

To enačbo logaritmirajmo in odvajajmo. Iz dobljene enačbe izrazimo $\dot{v}$ in upoštevajmo identiteto $1 + e\cos v = G^2/r$ iz (4.29). Sledi

$$\dot{v} = \frac{\dot{e}\cos v}{e\sin v} - \frac{G^2}{re\sin v}(\frac{2\dot{G}}{G} - \frac{\dot{r}}{r}). \tag{4.30}$$

Odvajajmo identiteto $e^2 = 1 - G^2/L^2$, da dobimo izraz za $\dot{e}$, v njem nadomestimo $\dot{L}$ in $\dot{G}$ z izrazi iz (4.22) in to vnesimo v (4.30). Poleg tega v (4.30) nadomestimo še $\dot{r}$ z izrazom iz (4.21). Dobimo

$$\dot{v} = \frac{G}{r^2} + F_r\frac{G}{e}\cos v + F_b\frac{G^2}{re\sin v}(\frac{G\cos v}{e} - \frac{2r}{G} - \frac{r^2\cos v}{e^2 G}).$$

Če tu nadomestimo r z izrazom iz (4.29), dobimo bolj uporaben izraz za $\dot{v}$

$$\dot{v} = \frac{G}{r^2} + F_r\frac{G}{e}\cos v - F_b\frac{G}{e}(1 + \frac{r}{G^2})\sin v. \tag{4.31}$$

Iz (4.27) dobimo $\dot{g} = \dot{\theta} - \dot{v}$. Ko v to zvezo vnesemo izraz za $\dot{\theta}$ iz (4.28) in izraz za $\dot{v}$ iz (4.31), dobimo diferencialno enačbo za g

$$\dot{g} = -F_r\frac{G}{e}\cos v + F_b\frac{G}{e}(1 + \frac{r}{G^2})\sin v - F_n\frac{r\cos i}{G\sin i}\sin(g + v). \tag{4.32}$$

Zadnji Delaunayev element, srednjo anomalijo ℓ, smo definirali v (3.29). Da dobimo uporaben izraz za $\dot{\ell}$, je treba izvršiti daljše računanje. Najprej odvajamo obe strani Keplerjeve enačbe (3.29), da dobimo $\dot{\ell}$ v odvisnosti od $\dot{u}$ in $\dot{e}$. Uporabimo zvezi (3.25) in (4.29), da dokažemo

$$r = L^2(1 - e\cos u), \tag{4.33}$$

in uporabimo to identiteto, da poiščemo izraz za $\dot{u}$. Ko vstavimo še izraze za $\dot{r}$, $\dot{e}$ in $\dot{L}$, ki smo jih dobili že prej, in večkrat upoštevamo zveze (3.25), (4.20), (4.29) in (4.33), lahko pokažemo, da je

$$\dot{\ell} = \frac{1}{L^3} + \frac{r}{eL}[(-2e + \cos v + e\cos^2 v)F_r - (2 + e\cos v)\sin v F_b]. \tag{4.34}$$

Če povzamemo, Delaunayevi elementi (L, G, H, ℓ, g, h) za Keplerjevo gibanje, moteno s silo $\mathbf{F}$, zadoščajo naslednjemu sistemu diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= L^3(F_r \frac{e}{G} \sin v + F_b \frac{G}{r}), \\
\dot{G} &= r F_b, \\
\dot{H} &= r(F_b \cos i - F_n \sin i \cos(g+v)), \\
\dot{\ell} &= \frac{1}{L^3} + \frac{r}{eL}[(-2e + \cos v + e\cos^2 v)F_r - (2 + e\cos v)\sin v F_b], \\
\dot{g} &= -F_r \frac{G}{e} \cos v + F_b \frac{G}{e}(1 + \frac{r}{G^2}) \sin v - F_n \frac{r \cos i}{G \sin i} \sin(g+v), \\
\dot{h} &= r F_n \frac{\sin(g+v)}{G \sin i}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Seveda naša transformacija enačb gibanja perturbiranega Keplerjevega problema v Delaunayeve elemente ni dokončana. Komponente sile $\mathbf{F}$ kot tudi funkcije

$$r, \qquad e, \qquad \cos v, \qquad \sin v, \qquad \cos i, \qquad \sin i$$

moramo izraziti z Delaunayevimi elementi. Iz definicije spremenljivke H (4.23) dobimo identiteto

$$\cos i = \frac{H}{G}.$$

Zaradi naše predpostavke $G = P_\theta \neq 0$ in dejstva, da je $0 \leq i < \pi$, je i enolično določen z Delaunayevima spremenljivkama H in G. Spremenljivka e je izražena z Delaunayevima spremenljivkama G in L v identiteti (4.20). Identiteti (3.25) povesta, kako je spremenljivka v odvisna od e in u, (3.31) pa pove, kako je u udvisna od e in ℓ. Torej tudi v znamo izraziti z Delaunayevimi spremenljivkami. V (4.33) pa se vidi, da znamo izraziti tudi r. Ko vse te transformacije izvršimo, postanejo diferencialne enačbe (4.35) zelo zapletene. Še posebno zato, ker v njih nastopa tudi obrat Keplerjeve enačbe (3.31).

Še vedno ni povsem jasno, kako naj iz sistema (4.35) izluščimo uporabne informacije. Le eno je takoj očitno: če sila $\mathbf{F}$ ni prisotna, potem je Keplerjevo gibanje, izraženo v Delaunayevih elementih, rešitev integrabilnega sistema

$$\dot{L} = 0, \qquad \dot{G} = 0, \qquad \dot{H} = 0, \qquad \dot{\ell} = \frac{1}{L^3}, \qquad \dot{g} = 0, \qquad \dot{h} = 0.$$

Opazimo, da je opis Keplerjevega gibanja v Delaunayevih elementih zelo preprost. Delaunayevi elementi so res akcijsko-kotne spremenljivke, ki smo jih želeli poiskati. Akcijske spremenljivke L, G, H so konstantne, od kotnih spremenljivk pa le ℓ ni konstantna. Ker si predstavljamo, da je fazni prostor navit vzdolž spremenljivke ℓ, opazimo, da enakomerno spreminjanje spremenljivke ℓ kaže, da je Keplerjev fazni tir periodičen. Torej v faznem prostoru obstaja območje, ki je zapolnjeno s periodičnimi faznimi tiri.

Dejstvo, da sta dva od treh kotov, ki nastopajo v (4.35), konstantna v primeru neperturbiranih gibanj, je posebno lepa, mogoče čarobna lastnost gravitacijske sile (1.3). Ta posebnost Keplerjevega gibanja nam bo omogočila, da dobimo nekaj strogih rezultatov o perturbiranem sistemu, vsaj v primeru, ko je sila $\mathbf{F}$ "majhna", to je, ko je $\mathbf{F} = \epsilon \mathbf{F}_\star$, funkcija $\mathbf{F}_\star$ omejena in $\epsilon \in \mathbb{R}$ smatramo kot mali parameter.

5 Vpliv sploščenosti planeta

Oglejmo si perturbacijski problem, ki izhaja iz dejstva, da Zemlja nima pravilne sferične oblike. Gravitacijski zakon pravi, da se dva delca (točkasti masi) privlačita s silo, ki je obratnosorazmerna s kvadratom njune oddaljenosti. Zemlja je sestavljena iz velikega števila delcev in treba je upoštevati vse njihove prispevke k skupni gravitacijski sili. Toda če smatramo, da je Zemlja homogena krogla, potem je gravitacijska sila, ki deluje na njen naravni ali umetni satelit, enaka, kot če bi bila vsa njena masa zbrana v središču krogle. Ker pa pravo obliko Zemlje ponavadi aproksimiramo s sploščenim sferoidom, ki je izbočen na ekvatorju, je gravitacijska sila, ki deluje na satelit, odvisna od lege satelita glede na ekvator. Videli bomo, da so enačbe gibanja Zemljinega satelita, ki upoštevajo sploščenost Zemlje, kar zapletene. Enačbe gibanja bomo zapisali v akcijsko-kotnih spremenljivkah in poskušali povedati kaj o njihovih rešitvah.

5.1 Gravitacijski potencial sferoida

Predpostavimo, da imamo telo z neko maso postavljeno tako, da je njegovo težišče v izhodišču običajnega koordinatnega sistema z bazo $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$. Naj bo porazdelitev mase telesa osnosimetrična glede na os z in naj bo poleg tega tudi simetrična glede na ravnino (x, y). Tako telo imenujemo *sferoid*. Zemlja je oblikovana približno kot sferoid, ki ima za ravnino (x, y) ravno ekvatorialno ravnino. Poskušajmo zapisati gravitacijski potencial sferoida. Sledili bomo razlagi v [8].

Točkasta masa. Oglejmo si najprej gravitacijski potencial točkaste mase M, ki ne leži v izhodišču, temveč je njen krajevni vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Poleg nje imejmo v prostoru še točkasto maso m s krajevnim vektorjem $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Naj bo $\varrho := |\mathbf{a}|$, $r := |\mathbf{r}|$, $\varDelta := |\mathbf{r} - \mathbf{a}|$ in naj bo ϑ kot med vektorjema $\mathbf{a}$ in $\mathbf{r}$ (glej sliko 5.1). Velja

$$\varDelta^2 = (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \tag{5.1}$$

in

$$\varDelta^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\vartheta. \tag{5.2}$$

Gravitacijski potencial masne točke M je

$$U = -\frac{G_0 M}{\varDelta}. \tag{5.3}$$

O tem se lahko prepričamo, če izračunamo silo na masno točko m iz potencialne energije mU po formuli $\mathbf{F} = -\operatorname{grad}(mU)$. Res dobimo izraz za gravitacijsko silo (1.3).

Izrek 5.1 *Gravitacijski potencial točkaste mase M zadošča Laplaceovi parcialni diferencialni enačbi $\nabla^2 U = 0$ v vsaki točki, različni od $\mathbf{a}$.*

Slika 5.1: Legi točkastih mas

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G_0 M (x-a_1)}{\Delta^3}\right) = G_0 M \frac{\Delta^3 - 3(x-a_1)^2 \Delta}{\Delta^6}, \\
\nabla^2 U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \\
&= G_0 M \frac{3\Delta^3 - 3\Delta((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2)}{\Delta^6} = 0.
\end{aligned}$$

■

Poskušajmo razviti potencial (5.3) v vrsto. Predpostavimo, da je $r > \varrho$. Delec m je tako v zunanjosti sfere, ki ima središče v izhodišču in gre skozi M. Označimo

$$\frac{\varrho}{r} = t < 1.$$

Sledi

$$U = -\frac{G_0 M}{\Delta} = -\frac{G_0 M}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\vartheta}} = -\frac{G_0 M}{r\sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\vartheta}}.$$

Spomnimo se (glej [10]), da je $(1 + t^2 - 2t\cos\vartheta)^{-1/2}$ rodovna funkcija Legendrevih polinomov[1]:

$$(1+t^2-2tw)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w)t^n, \qquad |t| < 1. \tag{5.4}$$

Zato je razvoj potenciala (5.3)

$$U = -G_0 M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \varrho^n, \qquad r > \varrho. \tag{5.5}$$

V primeru, ko iščemo razvoj potenciala v notranjosti sfere, ki gre skozi M, dobimo podoben izraz: vlogi ϱ in r sta zamenjani. Funkcije

$$\frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.6}$$

ki se pojavljajo v razvoju, so odvisne od lege delca. Lahko jih izrazimo kot funkcije spremenljivk x, y, z. Ta opazka nam omogoča, da povemo naslednji izrek.

Izrek 5.2 *Funkcije (5.6) zadoščajo Laplaceovi enačbi.*

Dokaz. Uporabimo operator ∇^2 na razvoju (5.5). Po izreku 5.1 dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n \nabla^2 \left[\frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \right] = 0.$$

Leva stran je potenčna vrsta v spremenljivki ϱ. Pri neki fiksni legi delca je ta vrsta identično enaka 0. Zato so vsi koeficienti vrste enaki 0. Ta razmislek lahko ponovimo pri vsaki fiksni legi delca. Torej so koeficienti vrste identično enaki 0. ∎

Kopice delcev in toga telesa. Rezultate, ki smo jih dobili doslej, posplošimo. Polje sil, ki deluje na delec z maso m, naj ne poraja le en masni delec M, temveč končno število masnih točk M_i. Razdaljo masnega delca M_i od izhodišča označimo z ϱ_i, kot med krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$ od m in $\mathbf{a}_i$ od M_i pa s ϑ_i. Skupen gravitacijski potencial U je enak vsoti posameznih potencialov. Naj bo $r > \varrho_i$ za vse točke $i = 1, 2, \ldots, N$. Potem iz (5.5) dobimo

$$U = -G_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{r^{n+1}}, \tag{5.7}$$

kjer je μ_n okrajšava za končno vsoto

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{N} M_i P_n(\cos\vartheta_i)\varrho_i^n. \tag{5.8}$$

[1]Adrien Marie Legendre (1752-1833) je bil francoski matematik.

Po uvedbi skupne mase kopice delcev

$$M = \sum_{i=1}^{N} M_i \tag{5.9}$$

opazimo, da je $\mu_0 = M$. Glede na to je prvi člen v razvoju potenciala U enak

$$-\frac{G_0 M}{r}. \tag{5.10}$$

Tako se za velike r v prvem približku potencial obnaša, kot da bi bile vse točke kopice zbrane v izhodišču.

Opazimo tudi, da koeficient razvoja μ_n ni odvisen od oddaljenosti delca r. Med gibanjem delca po poltraku, ki izhaja iz izhodišča, ostaja μ_n konstanten.

Vsa naša obravnava je veljavna tudi, če privlačna masa ni kopica točk, temveč togo telo končnih dimenzij. To vidimo, če nadomestimo končni vsoti v (5.8) in (5.9) z integracijo po opazovanem telesu.

Izrek 5.3 *Naj bo M skupna masa kopice ali togega telesa in naj se delec z maso m oddaljuje proti neskončnosti po poltraku, izhajajočem iz izhodišča. Potem potencial U te masne porazdelitve zadošča asimptotični zvezi*

$$U \sim -\frac{G_0 M}{r}, \qquad r \to \infty.$$

Dokaz. Trditev je posledica stavka (5.10). ■

Sferoidi. Definicijo sferoida smo zapisali v začetku razdelka. Poleg sferoida imejmo v prostoru še delec z maso m. Krajevni vektor tega delca naj oklepa z osjo z kot ϑ. Potencial U sferoida ima dve lastnosti:

- odvisen je le od kota ϑ in razdalje r,
- zadošča Laplaceovi enačbi.

Funkcije, ki imajo obe lastnosti, so že na voljo v (5.6). Zato je očitna ideja, da konstruiramo U kot linearno kombinacijo funkcij tipa (5.6), na primer

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}} \tag{5.11}$$

s številskimi koeficienti c_n, ki so določeni z obliko sferoida. Razvoj potenciala v tako vrsto res obstaja in koeficienti c_n so pri tem enolično določeni. Dokaza ne bomo navedli. V [5] je zapisan dokaz o obstoju in enoličnosti razvoja potenciala v podobnem primeru: masno telo leži izven neke sfere, razvoj potenciala v vrsto pa iščemo v notranjosti sfere.

Legendrevi polinomi z lihim indeksom so lihe funkcije, Legendrevi polinomi s sodim indeksom so sode funkcije:

$$P_n(\cos\vartheta) = (-1)^n P_n(-\cos\vartheta).$$

Do te zveze pridemo iz (5.4):

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(w)t^n &= (1+t^2-2tw)^{-\frac{1}{2}} = (1+(-t)^2-2(-t)(-w))^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-w)(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P_n(-w)t^n.\end{aligned}$$

Označimo $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \varphi$. Ker je sferoid simetričen glede na (x, y) ravnino, mora za poljuben $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ veljati

$$\begin{aligned}U(\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi) &= U(\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi), \\ U(-\sin\varphi) &= U(\sin\varphi), \\ U(-\sin(\vartheta-\frac{\pi}{2})) &= U(\sin(\vartheta-\frac{\pi}{2})), \\ U(\cos\vartheta) &= U(-\cos\vartheta).\end{aligned}$$

Potencial sferoida U mora biti torej soda funkcija v spremenljivki $\cos\vartheta$. Zato polinomi P_n z lihimi indeksi v razvoju (5.11) ne nastopajo.

Prvi koeficient razvoja c_0 je določen z izrekom 5.3. Njegova vrednost je

$$c_0 = -G_0 M,$$

kjer je M masa sferoida. Sledi

$$U = -\frac{G_0 M}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \frac{P_n(\cos\vartheta)}{r^{n+1}}.$$

V primeru Zemlje razvoj običajno zapišemo

$$U = -\frac{G_0 M}{r} + \frac{G_0 M}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n(\frac{R_0}{r})^n P_n(\cos\vartheta), \tag{5.12}$$

kjer je R_0 polmer ekvatorja. Ker Zemlja ni popolnoma simetrična glede na ekvatorialno ravnino, nastopajo v vrsti tudi lihi členi. Koeficienti J_n so brezdimenzijske konstante. Če upoštevamo razvoj le do člena, v katerem nastopa Legendrev polinom $P_2(\cos\vartheta) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\vartheta$, dobimo približno predstavitev potenciala

$$U = -\frac{G_0 M}{r} + \frac{G_0 M J_2}{2}\frac{R_0^2}{r^3}(3\cos^2\vartheta - 1), \qquad \cos\vartheta = \frac{z}{r}. \tag{5.13}$$

5.2 Gibanje satelita okoli sploščenega planeta

Imejmo planet v obliki sferoida z maso m_1 in polmerom ekvatorja R_0. Poleg njega imejmo satelit z maso m_2, ki naj bo zanemarljiva v primerjavi z maso m_1. V tem primeru lahko smatramo, da planet miruje. Kartezični koordinatni sistem postavimo tako, da je njegovo izhodišče v težišču planeta, os z pa sovpada z osjo simetrije planeta. Glede na (5.12) in (5.13) ima gravitacijski potencial planeta obliko

$$-\frac{G_0 m_1}{r} + \mathcal{U}(r,z) + O((\frac{R_0}{r})^3),$$

kjer je

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\frac{G_0 m_1 J_2 R_0^2}{r^3}(1 - 3\frac{z^2}{r^2}).$$

Prvi člen v razvoju je ravno člen, ki nam da gravitacijsko silo točkaste mase, ki določa Keplerjevo gibanje.

Aproksimirajmo gravitacijski potencial s tem, da v njegovem razvoju izpustimo člene višjega reda. Oglejmo si Keplerjevo gibanje satelita, ki ga moti sila, ki jo da drugi člen v razvoju potenciala. Ta sila je $\mathbf{F}_2 = -\operatorname{grad}(m_2\mathcal{U})$. V enačbah (4.1) upoštevamo $\mathbf{R}_1 \equiv 0$ in $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_2$ pa dobimo enačbo

$$m_2\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}_2$$

oziroma

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{G_0 m_1}{r^3}\mathbf{R} - \operatorname{grad}\mathcal{U}. \tag{5.14}$$

Ta enačba pove, kako se satelit giblje glede na planet.

Da bomo lahko uporabili splošne formule transformacije v Delaunayeve spremenljivke (4.35), moramo sistem (5.14) najprej reskalirati. Tako kot v 3. in 4. poglavju uvedimo spremenljivke $\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{R}$, $\bar{r} = |\bar{\mathbf{R}}|$, $\bar{t} = \frac{1}{\beta}t$. Pri tem naj bo β konstanta, merjena v sekundah, in naj bo $\alpha := (G_0 m_1)^{1/3}\beta^{2/3}$, tako da je α merjena v metrih. Označimo še odvode po novih spremenljivkah: $\bar{\mathbf{R}}' := d\bar{\mathbf{R}}/d\bar{t}$, $\overline{\operatorname{grad}}\mathcal{U} := (\partial\mathcal{U}/\partial\bar{x}, \partial\mathcal{U}/\partial\bar{y}, \partial\mathcal{U}/\partial\bar{z})$. Vnaprej si izračunajmo

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\mathcal{U}(\alpha\bar{r},\alpha\bar{z}) &= \frac{1}{\alpha^3}\operatorname{grad}\mathcal{U}(\bar{r},\bar{z}) = \frac{1}{\alpha^3}\overline{\operatorname{grad}}\mathcal{U}(\bar{r},\bar{z})\frac{\partial\bar{\mathbf{R}}}{\partial\mathbf{R}} = \frac{1}{\alpha^3}\overline{\operatorname{grad}}\mathcal{U}(\bar{r},\bar{z})\frac{1}{\alpha}\mathbf{I} = \\
&= \frac{1}{\alpha^4}\overline{\operatorname{grad}}\mathcal{U}(\bar{r},\bar{z}).
\end{aligned}$$

Na enak način, kot smo dobili enačbo (3.1), tudi enačbo (5.14) zapišemo v novih spremenljivkah:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}'' &= -\frac{1}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{R}} - \frac{\beta^2}{\alpha}\operatorname{grad}\mathcal{U}(\alpha\bar{r},\alpha\bar{z}), \\
\bar{\mathbf{R}}'' &= -\frac{1}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{R}} - \frac{\beta^2}{\alpha^5}\overline{\operatorname{grad}}\mathcal{U}(\bar{r},\bar{z}).
\end{aligned}$$

Namesto novih oznak uporabljajmo kar stare:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} - \frac{\beta^2}{\alpha^5}\,\mathrm{grad}\,\mathcal{U}(r,z), \\
\ddot{\mathbf{R}} &= -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}, \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

kjer je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= -\frac{\beta^2}{\alpha^5}\,\mathrm{grad}\,\mathcal{U}(r,z) = \\
&= -\frac{\beta^2}{\alpha^5}(-\frac{1}{2})G_0 m_1 J_2 R_0^2 \begin{pmatrix} -3xr^{-5} - 3(-5)xz^2r^{-7} \\ -3yr^{-5} - 3(-5)yz^2r^{-7} \\ -3zr^{-5} - 3(2zr^{-5} - 5z^3r^{-7}) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\beta^2}{\sqrt[3]{G_0 m_1 \beta^2}^5} G_0 m_1 J_2 R_0^2 \frac{(-3)}{2r^5} \begin{pmatrix} (1 - 5\frac{z^2}{r^2})x \\ (1 - 5\frac{z^2}{r^2})y \\ (3 - 5\frac{z^2}{r^2})z \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Označimo

$$
\epsilon := \frac{3}{2} J_2 \frac{R_0^2}{(G_0 m_1)^{2/3} \beta^{4/3}}. \qquad (5.16)
$$

Parameter ϵ je brezdimenzijski. Z njim komponente sile zapišemo

$$
\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\epsilon}{r^5}(1 - 5\frac{z^2}{r^2})x, \\
F_y &= -\frac{\epsilon}{r^5}(1 - 5\frac{z^2}{r^2})y, \\
F_z &= -\frac{\epsilon}{r^5}(3 - 5\frac{z^2}{r^2})z. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Če v (5.16) uporabimo vrednosti Zemlje

$$
G_0 m_1 \approx 4 \cdot 10^{14} m^3/s^2, \qquad R_0 \approx 6,3 \cdot 10^6 m, \qquad J_2 \approx 10^{-3},
$$

dobimo $\epsilon \approx 11\beta^{-4/3}$.

Mi bomo predpostavili, da je parameter β fiksen. Kljub temu bomo predpostavljali, da je ϵ prost parameter, kot da so fizikalne lastnosti planeta (Zemlje) spremenljive. S tem lahko smatramo, da je ϵ "mali parameter". Uporabljamo torej lahko tehniko, v kateri med računanjem marsikaj zanemarjamo. Seveda pa je treba na koncu eksperimentalno preveriti, če so zaključki, ki jih na ta način dobimo, v originalnem modelu res prisotni. Če so, potem z neko gotovostjo lahko trdimo, da matematično razumemo pojave v modelu. Zelo težko ali celó nemogoče pa bi bilo dokazati, da pri vrednosti parametra ϵ, ki jo ima Zemlja, prej omenjeni zaključki veljajo.

Da bomo lahko uporabili enačbe v Delaunayevih elementih (4.35), moramo komponente sile (5.17) izraziti v bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$. S prehodno matriko $\mathbf{N}$ v (4.14) zapišemo silo v novi bazi

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{N}(\mathbf{R})).$$

Upoštevajmo

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + 0\mathbf{e}_b + 0\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} r(\cos h\cos\theta - \sin h\cos i\sin\theta) \\ r(\sin h\cos\theta + \cos h\cos i\sin\theta) \\ r\sin i\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Za silo (5.17) dobimo

$$\mathbf{F}(\mathbf{N}(\mathbf{R})) =$$

$$= \frac{-\epsilon}{r^5}\begin{pmatrix} 1-5\sin^2 i\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1-5\sin^2 i\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 3-5\sin^2 i\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(\cos h\cos\theta - \sin h\cos i\sin\theta) \\ r(\sin h\cos\theta + \cos h\cos i\sin\theta) \\ r\sin i\sin\theta \end{pmatrix}$$

in naprej

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{N}(\mathbf{R})) = -\frac{\epsilon}{r^4}\begin{pmatrix} 1-3\sin^2\theta\sin^2 i \\ \sin 2\theta\sin^2 i \\ \sin\theta\sin 2i \end{pmatrix}.$$

Upoštevajmo (4.27) pa dobimo transformirane komponente sile

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{\epsilon}{r^4}(1-3\sin^2(g+v)\sin^2 i), \\ F_b &= -\frac{\epsilon}{r^4}\sin(2g+2v)\sin^2 i, \\ F_n &= -\frac{\epsilon}{r^4}\sin(g+v)\sin 2i. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ko vstavimo komponente sile (5.18) v sistem (4.35) in izrazimo vse spremenljivke v Delaunayevih elementih (tudi s pomočjo razvoja v vrsto (3.31)), dobimo enačbe gibanja za satelit, ki se giblje okrog sploščenega planeta. Enačbe, ki jih dobimo, so zelo zapletene. Toda enačba za H je zelo preprosta:

$$\dot{H} = r(-\frac{\epsilon}{r^4})(\sin(2(g+v))\sin^2 i\cos i - \sin(g+v)\sin(2i)\sin i\cos(g+v)) = 0.$$

To, da je z-komponenta vrtilne količine, H, konstantna, je bilo zaradi osne simetrije mase planeta tudi pričakovati. Eno napoved o gibanju satelita imamo.

Metoda povprečenja. Enačbe gibanja, ki smo jih dobili zgoraj iz sistema (4.35), zapišimo v strnjeni obliki (1.8). Akcijske spremenljivke L, G, H in tudi spremenljivki g, h (ker v neperturbiranem sistemu tudi zanju velja $\dot{g} = 0$, $\dot{h} = 0$) zložimo v vektor $\mathbf{I} := (L, G, H, g, h)$. Z njim lahko naš sistem enačb zapišemo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}} &= \epsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{I}, \ell), \\ \dot{\ell} &= L^{-3} + \epsilon f_2(\mathbf{I}, \ell), \end{aligned} \tag{5.19}$$

kjer sta $\mathbf{f}_1$ in f_2 2π-periodični funkciji spremenljivke ℓ. Sistem (5.19) ima posebno lastnost: spremenljivke v $\mathbf{I}$ (to so L, G, H, g, h) se v skaliranem času spreminjajo relativno počasi (njihovi odvodi so reda ϵ), medtem ko se le spremenljivka ℓ spreminja hitro. Zato imenujemo spremenljivke L, G, H, g, h *počasne spremenljivke*, spremenljivko ℓ pa *hitra spremenljivka.*

Najprej se vprašajmo, po kolikšnem času bi se lahko zgodilo, da se satelitu spremeni smer gibanja od "gibanja naprej" v "gibanje nazaj". To je, po kolikšnem času $\dot{\ell}(t)$ lahko doseže vrednost 0. Pri opazovanju gibanj satelita smo se že omejili na območje, kjer je energija $E(t) < 0$. Sedaj predpostavimo še to, da se satelit ne giblje preveč blizu roba tega območja. To je, obstaja naj konstanta a, da je $L^{-3}(t) = (-2E(t))^{3/2} \geq a > 0$. V drugi enačbi sistema (5.19) je na desni strani drugi člen, ki je reda velikosti ϵ, majhen v primerjavi s prvim členom, ki je reda velikosti 1. Zato se naše vprašanje v bistvu glasi: v kolikšnem času se $L^{-3}(t)$ lahko spremeni od $L^{-3}(0)$ do svoje najmanjše možne vrednosti, to je a. V kolikšnem času se $L(t)$ lahko spremeni od $L(0)$ do $a^{-1/3}$? V kolikšnem času se $L(t)$ lahko spremeni za količino reda velikosti 1? Odgovor nam pove prva, vektorska enačba sistema (5.19) oziroma njena komponenta

$$\dot{L} = \epsilon f_L(\mathbf{I}, \ell).$$

Iz te enačbe preberemo, da ima časovna sprememba spremenljivke L preko časovnega obdobja reda 1 red velikosti ϵ. Z drugimi besedami: preteči mora časovno obdobje reda $1/\epsilon$, da se spremenljivka L spremeni za red velikosti 1. Torej se šele po časovnem obdobju reda velikosti $1/\epsilon$ lahko zgodi, da $\dot{\ell}(t)$ doseže vrednost 0 in se smer gibanja satelita spremeni. Za to časovno obdobje bomo lahko dobili nekaj zaključkov.

Na našem primeru (5.19) bomo uporabili metodo povprečenja. Več o njej lahko preberemo v [2] ali [1], začetnika na tem področju pa sta Lagrange[2] in Laplace[3]. Ker se v sistemu (5.19) spremenljivke L, G, H, g, h spreminjajo počasi, je smiselno opazovati njihovo povprečno spreminjanje, kjer povprečja izračunamo glede na spremenljivko ℓ. Bolj natančno, namesto sistema (5.19), v katerem nastopajo

[2]Joseph Louis Lagrange (1736-1813) je bil francoski matematik in astronom.

[3]Pierre Simon Laplace (1749-1827) je bil francoski matematik in astronom.

spremenljivke vektorja $\mathbf{I}$, bomo opazovali "povprečen" sistem z novimi spremenljivkami v vektorju $\mathbf{J}$,

$$\dot{\mathbf{J}} = \epsilon \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{J}), \tag{5.20}$$

kjer je

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}_1(\mathbf{J}, \ell)\, d\ell. \tag{5.21}$$

Sistem (5.20) je znatno preprostejši od sistema (5.19). Ideja je v tem, da, vsaj preko daljšega časovnega obdobja, počasne spremenljivke s spreminjanjem spremenljivke ℓ hitro oscilirajo (glej sliko 5.2). Če z metodo povprečenja te hitre oscilacije izravnamo,

Slika 5.2: Rešitvi $\mathbf{I}(t)$ sistema (5.19) in $\mathbf{J}(t)$ sistema (5.20)

"zamik" vrednosti počasnih spremenljivk postane viden. Spremembo spremenljivk v $\mathbf{I}(t)$ s spremenljivkami v $\mathbf{J}(t)$ moramo opravičiti. V ta namen brez dokaza navedimo izrek iz [1], prilagojen našemu primeru (5.19).

Izrek 5.4 *Naj bo v sistemu (5.19) krožna frekvenca* $L^{-3}(t) > c > 0$*, kjer je* c *konstanta. Naj bodo krožna frekvenca* L^{-3} *ter funkciji* $\mathbf{f}_1$ *in* f_2 *gladke funkcije na njihovem definicijskem območju in naj bodo na definicijskem območju skupaj z njihovimi prvimi odvodi omejene s konstanto* C*. Naj bo zagotovljena tudi zveznost rešitev: za* $0 \leq t \leq 1/\epsilon$ *naj se rešitev* $\mathbf{J}(t)$ *povprečenega sistema preveč ne približa robu območja, na katerem je sistem definiran. Tedaj je za dovolj majhne* ϵ *razlika med počasnim gibanjem* $\mathbf{I}(t)$ *sistema (5.19) in gibanjem* $\mathbf{J}(t)$ *povprečenega sistema (5.20) v časovnem obdobju* $t \in [0, 1/\epsilon]$ *majhna: če je* $\mathbf{I}(0) = \mathbf{J}(0)$*, potem je*

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{J}(t)| < c_1 \epsilon, \qquad 0 \leq t \leq 1/\epsilon,$$

kjer je c_1 *konstanta, odvisna od* c *in* C*.*

Oglejmo si, kaj lahko povemo po tem, ko metodo povprečenja uporabimo na enačbah gibanja satelita, ki potuje okoli sploščenega planeta.

Tako kot je zapisano v (5.21), želimo izračunati povprečja desnih strani enačb gibanja (4.35). Videli smo, da se spremenljivka ℓ pojavlja, ko pretvorimo r, $\cos v$ in $\sin v$ v Delaunayeve elemente. Oglejmo si postopek za spremenljivko G. Po tem, ko smo v enačbe gibanja vstavili silo (5.18), je enačba za spremenljivko G

$$\dot{G} = -\epsilon \sin^2 i \frac{\sin(2g + 2v)}{r^3}.$$

Ko uporabimo adicijski izrek za sinus, vidimo, da moramo poiskati povprečji $\langle(\sin 2v)/r^3\rangle$ in $\langle(\cos 2v)/r^3\rangle$. Vnaprej izračunajmo odvod $d\ell/dv$. Odvod Keplerjeve enačbe (3.29) je

$$\frac{d\ell}{du} = 1 - e\cos u,$$

kar nam skupaj s (3.27), (4.33) in (4.20) da

$$\frac{d\ell}{dv} = \frac{d\ell}{du}\frac{du}{dv} = \frac{(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{r^2}{L^4}\frac{L}{G} = \frac{r^2}{GL^3}.$$

Sedaj v prvotnem integralu zamenjamo spremenljivko in uporabimo zvezo (4.29), da dobimo povprečji

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\sin 2v}{r^3}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2v}{r^3}\,d\ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2v}{r^3}\frac{r^2}{GL^3}\,dv = \frac{1}{2\pi GL^3}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2v}{r}\,dv = \\
&= \frac{1}{2\pi G^3L^3}\int_0^{2\pi}\sin 2v(1 + e\cos v)\,dv = 0, \\
\langle\frac{\cos 2v}{r^3}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2v}{r^3}\,d\ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2v}{r^3}\frac{r^2}{GL^3}\,dv = \frac{1}{2\pi GL^3}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2v}{r}\,dv = \\
&= \frac{1}{2\pi G^3L^3}\int_0^{2\pi}\cos 2v(1 + e\cos v)\,dv = 0.
\end{aligned}$$

Od tod sledi $\dot{G} = 0$ (Za spremenljivko povprečenega sistema smo uporabili kar staro oznako.). Na enak način kot zgoraj izračunamo še povprečja, ki jih potrebujemo v postopkih za spremenljivke h, L, g. Dobimo

$$\begin{array}{ccc}
\langle\frac{\sin^2 v}{r^3}\rangle = \frac{1}{2G^3L^3}, & \langle\frac{\sin v\cos v}{r^3}\rangle = 0, & \langle\frac{\cos^2 v}{r^3}\rangle = \frac{1}{2G^3L^3}, \\
\langle\frac{\sin v}{r^4}\rangle = 0, & \langle\frac{\cos v}{r^4}\rangle = \frac{e}{G^5L^3}, & \langle\frac{\cos^3 v}{r^4}\rangle = \frac{3e}{4G^5L^3}, \\
\langle\frac{\cos^2 v\sin v}{r^4}\rangle = 0, & \langle\frac{\sin^2 v\cos v}{r^4}\rangle = \frac{e}{4G^5L^3}, & \langle\frac{\sin^3 v}{r^4}\rangle = 0, \\
\langle\frac{\cos 2v}{r^5}\rangle = \frac{3e^2}{4G^7L^3}, & \langle\frac{\sin 2v}{r^5}\rangle = 0, & \langle\frac{\cos 2v\sin v}{r^4}\rangle = 0, \\
\langle\frac{\sin 2v\sin v}{r^4}\rangle = \frac{e}{2G^5L^3}, & \langle\frac{\cos 2v\sin v}{r^3}\rangle = 0, & \langle\frac{\sin 2v\sin v}{r^3}\rangle = \frac{e}{4G^3L^3}.
\end{array}$$

Ko v računanju povprečij desnih strani enačb gibanja to upoštevamo, dobimo še ostale povprečene enačbe. Celoten povprečen sistem je

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \dot{G} = \dot{H} = 0,\\ \dot{g} &= -\epsilon\frac{1}{2L^3G^4}(5\sin^2 i - 4),\\ \dot{h} &= -\epsilon\frac{1}{L^3G^4}\cos i,\end{aligned} \tag{5.22}$$

kjer je $\cos i = H/G$. Pri tem smo za imena spremenljivk uporabili kar imena, ki nastopajo v prvotnem sistemu. Zato moramo paziti, da ne pride do zmede. Povprečen sistem ni ekvivalenten prvotnemu - ima drugo rešitev.

Končno smo prišli do sistema, ki ga lahko analiziramo. Našli smo kar nekaj količin, ki so v povprečju konstantne: koren velike polosi pritisnjene elipse L, velikost vrtilne količine G in z-komponenta vrtilne količine H. Zato so v povprečju konstantne tudi od njih odvisne količine: naklon pritisnjene ravnine i, ekscentričnost e, velika polos a in mala polos b. Argument perigeja (kot med premico, v kateri pritisnjena ravnina seka ekvatorialno ravnino, in poltrakom, ki gre iz težišča planeta skozi perigej satelita) se v povprečju spreminja s hitrostjo, ki je sorazmerna s $4 - 5\sin^2 i$. Če je naklon pritisnjene ravnine i manjši od kritičnega naklona, kjer je $\sin^2 i = \frac{4}{5}$ (oziroma $i \approx 63°$), potem se perigej tira pomika naprej. Če je naklon večji od kritičnega, potem se perigej pomika nazaj. Podobno je hitrost nazadovanja dvižnega vozla (njegovo smer določa h) sorazmerna s $\cos i$. Če je na primer orbita satelita polarna ($i = \frac{\pi}{2}$), potem je hitrost nazadovanja v povprečju enaka 0.

S postopkom povprečenja smo v našem primeru končali. Metoda povprečenja je le ena od osnovnih metod, ki so bile razvite za napovedovanje rešitev "realističnih" sistemov diferencialnih enačb, ki izvirajo iz nebesne mehanike.

6 Diamagnetični Keplerjev problem

Oglejmo si gibanje elektrona vodikovega atoma v magnetnem polju. Pri tem na elektron delujeta dve sili: privlačna sila jedra atoma, ki je v našem primeru le en proton, in še sila zaradi magnetnega polja, ki naj bo stacionarno in homogeno. Kartezični koordinatni sistem postavimo tako, da je njegovo izhodišče v jedru atoma, os z pa naj bo vzporedna z magnetnim poljem. Predpostaviti smemo, da proton ves čas miruje v izhodišču koordinatnega sistema, saj je njegova masa približno 2000-krat večja od mase elektrona. Vektor $\mathbf{R} = (x, y, z)$ naj nam označuje lego elektrona, $\mathbf{V} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ njegovo hitrost, $\mathbf{B} = (0, 0, b)$ gostoto magnetnega polja, q naboj elektrona, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} As/(Vm)$ influenčno konstanto, $\mathbf{p}$ gibalno količino elektrona in $r = |\mathbf{R}|$ oddaljenost elektrona od jedra. Coulombov[1] in Lorentzov zakon nam povesta, da sta sili na elektron

$$\mathbf{F}_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathbf{R}, \qquad \mathbf{F}_m = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

Drugi Newtonov zakon nam da enačbe gibanja v vektorski obliki

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{kq^2}{r^3}\mathbf{R}, \tag{6.1}$$

kjer smo označili $k := 1/(4\pi\epsilon_0)$. Ker elektron vodikovega atoma dosega hitrosti, ki so približno enake enemu odstotku svetlobne hitrosti (glej [3]), obravnavajmo problem nerelativistično. Naj bo torej $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$.

Problem gibanja elektrona okrog protona je praviloma treba obravnavati kvantno. Temu v prid govorijo fizikalni poskusi, ki pokažejo, da energija elektrona lahko zavzame le določene diskretne vrednosti (glej [9], 3. del). Poleg tega atom, kot si ga predstavljamo v klasični fiziki, ne bi bil obstojen. Iz njega bi namreč uhajala energija v obliki elektromagnetnega valovanja (glej [9], 2. del, str. 459). Mi bomo problem gibanja kljub temu obravnavali klasično.

Enačbo (6.1) zapišemo po komponentah

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= qb\dot{y} - \frac{kq^2}{r^3}x, \\
m\ddot{y} &= -qb\dot{x} - \frac{kq^2}{r^3}y, \\
m\ddot{z} &= -\frac{kq^2}{r^3}z
\end{aligned}$$

[1] Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) je bil francoski fizik.

oziroma

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{kq^2}{mr^3}x + 2\omega\dot{y}, \\
\ddot{y} &= -\frac{kq^2}{mr^3}y - 2\omega\dot{x}, \\
\ddot{z} &= -\frac{kq^2}{mr^3}z,
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

kjer smo označili $\omega := \frac{1}{2m}qb$. Ta sistem ima enako obliko kot perturbiran problem dveh teles. Zaradi podobnosti s perturbiranim Keplerjevim gibanjem se ta naloga imenuje diamagnetični Keplerjev problem. Kot smo že vajeni, sistem najprej reskaliramo. Uvedemo nove spremenljivke $\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{R}$, $\bar{r} = |\bar{\mathbf{R}}|$, $\bar{t} = \frac{1}{\beta}t$. Pri tem naj bo β konstanta, merjena v sekundah, in naj bo $\alpha := (kq^2/m)^{1/3}\beta^{2/3}$, tako da je α merjena v metrih. Označimo še $\bar{\mathbf{R}}' = d\bar{\mathbf{R}}/d\bar{t}$ in $\bar{\mathbf{R}}'' = d\bar{\mathbf{R}}'/d\bar{t}$. Dobimo enačbo

$$
\bar{\mathbf{R}}'' = -\frac{1}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{F}}, \qquad \bar{\mathbf{F}} = 2\omega\beta(\bar{y}', -\bar{x}', 0).
$$

Označimo

$$
\epsilon := 2\omega\beta \tag{6.3}
$$

in namesto novih oznak uporabljajmo kar stare:

$$
\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F}, \tag{6.4}
$$

kjer ima sila $\mathbf{F}$ komponente

$$
\begin{aligned}
F_x &= \epsilon\dot{y}, \\
F_y &= -\epsilon\dot{x}, \\
F_z &= 0.
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

Komponente sile (6.5) moramo izraziti v bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$, da bomo lahko uporabili enačbe gibanja v Delaunayevih elementih (4.35). Denimo, da imamo vektor hitrosti $\dot{\mathbf{R}}$ razvit v bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$ takole:

$$
\dot{\mathbf{R}} = v_r\mathbf{e}_r + v_b\mathbf{e}_b + v_n\mathbf{e}_n. \tag{6.6}
$$

Potem s prehodno matriko $\mathbf{N}$ v (4.14) zapišemo silo (6.5) v novi bazi

$$
\mathbf{N}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{N}(\dot{\mathbf{R}})).
$$

Po dolgotrajnem računanju, v katerem se k sreči mnogo členov uniči ali združi, dobimo

$$\begin{aligned} F_r &= \epsilon(v_b \cos i - v_n \sin i \cos\theta), \\ F_b &= \epsilon(-v_r \cos i + v_n \sin i \sin\theta), \\ F_n &= \epsilon(v_r \sin i \cos\theta - v_b \sin i \sin\theta). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Preostala nam je še naloga, da $\dot{\mathbf{R}}$ izrazimo v obliki (6.6), kjer naj bodo komponente v_r, v_b, v_n izražene v Delaunayevih elementih ali vsaj s količinami, ki so z Delaunayevimi elementi neposredno povezane. Pomagajmo si z enačbami (4.8). Najprej dobimo

$$v_n = \langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_n \rangle = \langle \dot{\mathbf{R}}, \frac{1}{G}\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{G}\langle \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle = 0, \tag{6.8}$$

kar smo pričakovali. Za preostali komponenti bomo potrebovali izraza za $\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle$ in $\langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle$. Najprej odvajajmo identiteto $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = r^2$ in upoštevajmo (4.21):

$$\begin{aligned} 2\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle &= 2r\dot{r}, \\ 2\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle &= 2r\frac{e\sin v}{G}, \\ \langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle &= \frac{re\sin v}{G}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Torej je

$$v_r = \langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_r \rangle = \langle \dot{\mathbf{R}}, \frac{1}{r}\mathbf{R} \rangle = \frac{1}{r}\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle = \frac{e\sin v}{G}. \tag{6.10}$$

Iz (4.15) dobimo $E = -L^{-2}/2$ in to vstavimo v definicijo energije (4.5), da dobimo še izraz za $\langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle - \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle}}, \\ -L^{-2}/2 &= \frac{1}{2}\langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle - \frac{1}{r}, \\ \langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle &= \frac{2}{r} - \frac{1}{L^2}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Iz (4.8), (6.11), (6.9), (4.33), (3.25) in (4.29) dobimo še

$$\begin{aligned} v_b &= \langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{e}_b \rangle = \langle \dot{\mathbf{R}}, \frac{1}{rG}(r^2\dot{\mathbf{R}} - \langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle \mathbf{R}) \rangle = \frac{r}{G}\langle \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{R}} \rangle - \frac{\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle}{rG}\langle \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{R} \rangle = \\ &= \frac{r}{G}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{L^2}\right) - \frac{1}{rG}\left(\frac{re\sin v}{G}\right)^2 = \frac{2}{G} - \frac{r}{GL^2} - \frac{e^2 r \sin^2 v}{G^3} = \\ &= \frac{2}{G} - \frac{r(1 - e\cos u)}{Gr} - \frac{e^2 G^2 \sin^2 v}{G^3(1 + e\cos v)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{G} - \frac{1}{G}\left(1 - e\frac{e+\cos v}{1+e\cos v}\right) - \frac{e^2\sin^2 v}{G(1+e\cos v)} = \frac{2}{G} - \frac{1-e^2\cos^2 v}{G(1+e\cos v)} =$$
$$= \frac{2}{G} - \frac{(1-e\cos v)(1+e\cos v)}{G(1+e\cos v)} = \frac{1+e\cos v}{G} = \frac{1+e\cos v}{G^2}G = \frac{G}{r}. \quad (6.12)$$

Komponente hitrosti (6.8), (6.10) in (6.12) vstavimo v (6.7) pa dobimo

$$\begin{aligned} F_r &= \epsilon\frac{G\cos i}{r}, \\ F_b &= -\epsilon\frac{e\cos i\sin v}{G}, \\ F_n &= -\epsilon\frac{\sin i}{G}(e\sin g + \sin(g+v)). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Več dela je bilo le s komponento F_n, kjer smo za poenostavljanje uporabili identiteti (4.27) in (4.29) ter adicijska izreka.

Komponente sile (6.13) vstavimo v sistem (4.35). Enačbe gibanja v Delaunayevih elementih, ki jih dobimo, so z izjemo $\dot{L} = 0$ zelo zapletene. Uporabimo metodo povprečenja. Tako kot smo zapisali v (5.21) izračunamo povprečja desnih strani enačb gibanja glede na spremenljivko ℓ preko intervala dolžine 2π. Pri tem je večkrat treba izračunati integrale racionalnih funkcij, katerih argumenti so kotne funkcije spremenljivke, po kateri integriramo. Pomagamo si s programom za simbolično računanje. Dobimo

$$\begin{array}{lll} \langle r\sin v\rangle = 0, & \langle r\cos v\rangle = \frac{G^5}{2\pi L^3}\frac{-3e\pi}{(1-e^2)^{5/2}}, & \langle r\cos^2 v\rangle = \frac{G^5}{2\pi L^3}\frac{(1+2e^2)\pi}{(1-e^2)^{5/2}}, \\ \langle r\sin v\cos v\rangle = 0, & \langle r\sin^2 v\rangle = \frac{G^5}{2\pi L^3}\frac{\pi}{(1-e^2)^{3/2}}, & \langle\frac{\cos v}{r}\rangle = \frac{G}{2\pi L^3}\frac{2\pi}{e}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right), \\ & & \langle\sin^2 v\rangle = \frac{G^3}{2\pi L^3}\frac{2\pi}{e^2}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right). \end{array}$$

S pomočjo teh zvez dobimo povprečen sistem

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{G} = \dot{L} = \dot{g} = 0, \\ \dot{h} &= -\frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Izrek 5.4 zagotavlja, da v primeru, ko je ϵ, ki je odvisen od gostote magnetnega polja, majhen, povprečen sistem dobro aproksimira dejanske razmere. Sistem (6.14) razkrije, da so elementi Keplerjevega gibanja, če se ne oziramo na drobne oscilacije, konstantni, le ravnina gibanja se enakomerno vrti okoli osi z. Vrti se s kotno hitrostjo $-\frac{\epsilon}{2} = -\omega\beta = -\frac{qb}{2m}\beta$ v skaliranem času oziroma v resnici s kotno hitrostjo $-\omega = -\frac{qb}{2m}$. To je ravno vsebina Larmorjevega izreka[2] (glej [7]). Krožna frekvenca

$$\omega = \frac{qb}{2m}, \quad (6.15)$$

ki je enaka polovici ciklotronske krožne frekvence, se imenuje *Larmorjeva frekvenca.*

[2]Sir Joseph Larmor (1857-1942) je bil irsko-angleški matematik in naravoslovec.

Kaj bi opazili, če bi elektron opazovali iz koordinatnega sistema, ki se enakomerno vrti okoli osi z s kotno hitrostjo $-\omega$? Pričakujemo, da bi bili Delaunayevi elementi H, G, L, g, h v grobem konstantni. To je, njihovi odvodi ne bi dosegli reda velikosti ϵ oziroma ω. Mogoče pa bi nam pogled iz te opazovalne točke omogočil opisati gibanje elektrona še bolj natančno. Metodo, pri kateri telo opazujemo iz vrtečega koordinatnega sistema, je iznašel Hill[3], ko je opisoval gibanja Lune (glej [4]).

Imejmo fiksni koordinatni sistem, v katerem označimo krajevni vektor elektrona $\mathbf{X}' = (x', y', z')$ in $r' := |\mathbf{X}'|$. Imejmo še koordinatni sistem, ki se enakomerno vrti okoli osi z s kotno hitrostjo Ω. V njem označimo krajevni vektor elektrona $\mathbf{X} = (x, y, z)$ in $r = |\mathbf{X}|$. Sistem (6.2) v vektorski obliki,

$$\ddot{\mathbf{X}}' = -\frac{kq^2}{mr'^3}\mathbf{X}' + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{X}}', \tag{6.16}$$

ki velja v fiksnem koordinatnem sistemu, zapišimo v vrtečem koordinatnem sistemu. Koordinate v fiksnem koordinatnem sistemu se izražajo s koordinatami v vrtečem koordinatnem sistemu preko enačbe

$$\mathbf{X}' = \mathbf{E}\mathbf{X}, \tag{6.17}$$

kjer je

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enačbo (6.17) dvakrat odvajajmo:

$$\dot{\mathbf{X}}' = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{X} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^{-1}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{X} + \dot{\mathbf{X}}), \tag{6.18}$$

$$\ddot{\mathbf{X}}' = \ddot{\mathbf{E}}\mathbf{X} + 2\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{E}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{E}(\mathbf{E}^{-1}\ddot{\mathbf{E}}\mathbf{X} + 2\mathbf{E}^{-1}\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{X}} + \ddot{\mathbf{X}}). \tag{6.19}$$

Pri tem je

$$\mathbf{E}^{-1}\dot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega\sin\Omega t & -\Omega\cos\Omega t & 0 \\ \Omega\cos\Omega t & -\Omega\sin\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}^{-1}\ddot{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \cos\Omega t & \sin\Omega t & 0 \\ -\sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega^2\cos\Omega t & \Omega^2\sin\Omega t & 0 \\ -\Omega^2\sin\Omega t & -\Omega^2\cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3]George William Hill (1838-1914) je bil ameriški matematik.

Vstavimo (6.17), (6.18) in (6.19) v enačbo (6.16) ter upoštevajmo $r = r'$, saj je $\mathbf{E}$ ortogonalna matrika. Dobimo

$$\mathbf{E}\begin{pmatrix} -\Omega^2 x - 2\Omega\dot{y} + \ddot{x} \\ -\Omega^2 y + 2\Omega\dot{x} + \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{kq^2}{mr^3}\mathbf{E}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\omega\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{E}\begin{pmatrix} -\Omega y + \dot{x} \\ \Omega x + \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

V zadnjem členu desne strani enačbe matriki komutirata in ju zamenjamo, potem pa enačbo pomnožimo z leve z $\mathbf{E}^{-1}$. Dobimo enačbe gibanja v vrtečem koordinatnem sistemu

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{kq^2}{mr^3}x + (2\omega\Omega + \Omega^2)x + 2(\omega + \Omega)\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{kq^2}{mr^3}y + (2\omega\Omega + \Omega^2)y - 2(\omega + \Omega)\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\frac{kq^2}{mr^3}z. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Kotna hitrost vrtečega koordinatnega sistema naj bo $\Omega = -\omega$. Dobimo sistem

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{kq^2}{mr^3}x - \omega^2 x, \\ \ddot{y} &= -\frac{kq^2}{mr^3}y - \omega^2 y, \\ \ddot{z} &= -\frac{kq^2}{mr^3}z, \end{aligned} \tag{6.21}$$

ki je že v primerni obliki, da ga lahko transformiramo v Delaunayeve elemente.

Sistem (6.21) reskaliramo na enak način kot sistem (6.2), potem pa namesto novih oznak uporabljamo kar stare. Reskalirani sistem v vektorski obliki je

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{r^3}\mathbf{R} + \mathbf{F},$$

kjer ima sila $\mathbf{F}$ komponente

$$\begin{aligned} F_x &= -\epsilon x, \\ F_y &= -\epsilon y, \\ F_z &= 0. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Pri tem smo označili

$$\epsilon := \omega^2\beta^2. \tag{6.23}$$

Medtem ko je v fiksnem koordinatnem sistemu ϵ označeval količino, ki je istega reda velikosti kot gostota magnetnega polja (glej (6.3) in (6.15)), nam v vrtečem koordinatnem sistemu ϵ označuje količino, ki je reda velikosti kvadrata gostote magnetnega polja.

Komponente sile (6.22) moramo izraziti v bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$. V bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$ ima krajevni vektor $\mathbf{R}$ koordinate $\mathbf{R} = (r, 0, 0)$. Takoj dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{R}) &= r \begin{pmatrix} \cos h \cos\theta - \sin h \cos i \sin\theta \\ \sin h \cos\theta + \cos h \cos i \sin\theta \\ \sin i \sin\theta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{N}(\mathbf{R})) &= -\epsilon r \begin{pmatrix} \cos h \cos\theta - \sin h \cos i \sin\theta \\ \sin h \cos\theta + \cos h \cos i \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

po malo daljšem računanju pa še silo v bazi $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{N}(\mathbf{R})) = -\epsilon r \begin{pmatrix} 1 - \sin^2 i \sin^2\theta \\ -\sin^2 i \sin\theta\cos\theta \\ -\sin i \cos i \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Upoštevajmo zvezo $\theta = g + v$ in identiteto za sinus dvojnega kota pa dobimo

$$\begin{aligned} F_r &= \epsilon r(\sin^2 i \sin^2(g+v) - 1), \\ F_b &= \epsilon r \frac{\sin^2 i}{2} \sin(2g + 2v), \\ F_n &= \epsilon r \frac{\sin(2i)}{2} \sin(g+v). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Komponente sile (6.24) vstavimo v sistem (4.35). Enačbe gibanja, ki jih dobimo, so z izjemo $\dot{H} = 0$ zelo zapletene. Tudi tokrat uporabimo metodo povprečenja. Ko nam računalnik izvrši zelo zamudne integracije, dobimo

$$\begin{array}{ccc} \langle r^2\cos^2 v\rangle = \frac{G^7}{2\pi L^3}\frac{\pi(4e^2+1)}{(1-e^2)^{7/2}}, & \langle r^2\sin^2 v\rangle = \frac{G^7}{2\pi L^3}\frac{\pi}{(1-e^2)^{5/2}}, & \\ \langle r^2\sin 2v\sin v\rangle = \frac{G^7}{2\pi L^3}\frac{-2e\pi}{(1-e^2)^{5/2}}, & \langle r^2\cos 2v\sin v\rangle = 0, & \langle r\sin^3 v\rangle = 0, \\ \langle r\sin^2 v\cos v\rangle = \frac{G^5}{2\pi L^3}\frac{-\pi}{e^3}\left(2 + \frac{3e^2-2}{(1-e^2)^{3/2}}\right), & \langle r\sin v\cos^2 v\rangle = 0, & \langle r\sin v\rangle = 0, \\ \langle r\cos^3 v\rangle = \frac{G^5}{2\pi L^3}\frac{\pi}{e^3}\left(2 + \frac{-6e^4+5e^2-2}{(1-e^2)^{5/2}}\right), & \langle r\cos v\rangle = \frac{G^5}{2\pi L^3}\frac{-3e\pi}{(1-e^2)^{5/2}}, & \langle\sin 2v\rangle = 0, \\ \langle\cos 2v\rangle = \frac{G^3}{2\pi L^3}\frac{2\pi}{e^2}\left(2 + \frac{3e^2-2}{(1-e^2)^{3/2}}\right), & \langle r^2\sin v\cos v\rangle = 0. & \end{array}$$

S pomočjo teh zvez dobimo povprečen sistem

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{L} = 0, \\ \dot{G} &= \epsilon\frac{5}{4}\sin^2 i\, L^2(L^2 - G^2)\sin 2g, \\ \dot{h} &= \epsilon\frac{1}{2}\cos i\, L^2 G\left(1 + 5\left(\frac{L^2}{G^2} - 1\right)\sin^2 g\right), \\ \dot{g} &= -\epsilon\frac{1}{4}L^2 G\left[2\left(\frac{L^2}{G^2}(4\sin^2 g + 1) - \cos^2 g\right)\cos^2 i + 3 + 5\cos 2g\right], \end{aligned} \tag{6.25}$$

ki v primeru, da je gostota magnetnega polja majhna, dobro aproksimira dejansko stanje. Sistem (6.25) potrjuje, kar smo pričakovali. Spremenljivke H, L, G, h, g so v grobem konstantne. Njihove vrednosti se spreminjajo izredno počasi, saj so njihovi odvodi reda velikosti kvadrata gostote magnetnega polja (glej (6.23) in (6.15)). Za bolj temeljito obravnavo pa je sistem (6.25) preveč zapleten.

Slika 6.1: Fazna ravnina podsistema (g, G)

Ugotovili smo že, da je spremenljivka H, ki je po definiciji enaka z-komponenti vrtilne količine, $H = x\dot{y} - y\dot{x}$, na rešitvah sistema (6.21) konstantna. O tem se z upoštevanjem enačb sistema (6.21) lahko prepričamo tudi direktno. Dobimo namreč $\dot{H} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$. Za nadaljnjo obravnavo se omejimo na primer, ko ima H izbrano vrednost 0. V tem primeru iz $H = x\dot{y} - y\dot{x} = 0$ sledi

$$\begin{aligned} x &= w(t)\cos\psi, \\ y &= w(t)\sin\psi, \end{aligned}$$

kjer je $w(t)$ neka gladka funkcija, ψ pa konstanta. Elektron se torej giblje po ravnini skozi izhodišče, ki vsebuje os z in ima normalo $\mathbf{e}_n \equiv (-\sin\psi, \cos\psi, 0)$. Definicija kota i, (4.9), pove, da za to gibanje velja $i \equiv \frac{\pi}{2}$. Ko to upoštevamo v (6.25), dobimo sistem

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \dot{L} = \dot{h} = 0, \\ \dot{G} &= \epsilon\frac{5}{4}L^2(L^2 - G^2)\sin 2g, \\ \dot{g} &= -\epsilon\frac{1}{4}L^2G(3 + 5\cos 2g). \end{aligned} \tag{6.26}$$

Najprej opazimo, da so spremenljivke L, H, h konstantne. Podsistemu (g, G) pa narišimo fazni portret. Fazni tiri zadoščajo enačbi z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{dG}{dg} = \frac{\epsilon \frac{5}{4} L^2 (L^2 - G^2) \sin 2g}{-\epsilon \frac{1}{4} L^2 G (3 + 5 \cos 2g)}$$

z rešitvijo

$$G = \pm L \sqrt{1 - \frac{C}{3 + 5 \cos 2g}},$$

kjer je C konstanta. Narišemo jih v fazni ravnini (glej sliko 6.1). Fazno ravnino vzdolž kotne spremenljivke g navijemo na fazni valj. Fazni valj obrežemo, saj se vrednosti spremenljivke G gibljejo le po intervalu $[0, L]$. Točke $\{(g, G) \mid G = L\}$ identificiramo, saj nam predstavljajo isto stanje sistema - kroženje, spremenljivka g, to je argument perihelija, pa v tem stanju izgubi svoj pomen. Dobimo disk. Imenujmo ga fazni disk, čeprav to ni ustaljen izraz. Predstavljamo si lahko, kot da sta G in g polarni koordinati: točka s koordinato $G = L$ je v izhodišču, točke s koordinato $G = 0$ so na obodu kroga, spremenljivka g, ki teče vzdolž oboda kroga, pa določa poltrak iz izhodišča, na katerem točka (g, G) leži (glej sliko 6.2). Obod kroga

Slika 6.2: Fazni disk podsistema (g, G)

s točkami $(g, 0)$ predstavlja gibanja satelita (elektrona) po izrojeni elipsi - daljici.

Ko mehanski sistem planeta in satelita oziroma protona in elektrona prehaja skozi eno od teh točk, se smer gibanja vzdolž elipse lahko spremeni. Pri tem lega baze $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_n]$ v prostoru preskoči v lego $[\mathbf{e}_r, -\mathbf{e}_b, -\mathbf{e}_n]$, lega baze $[\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_n]$ preskoči v lego $[-\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_b, -\bar{\mathbf{e}}_n]$, spremenljivka H spremeni predznak, kot i preide v $\pi - i$, kot θ preide v $\pi - \theta$, kot v ostane v in kot g preide v $\pi - g$. Zato moramo točko $(g, 0)$ identificirati s točko $(\pi - g, 0)$. Ko "levi rob" in "desni rob" faznega diska s slike 6.2 zlepimo, dobimo sfero. Imenujmo jo kar fazna sfera. Na sliki 6.3 je prikazana

Slika 6.3: Skica fazne sfere

skica fazne sfere s "prednje" strani, "zadaj" pa se skriva še ena negibna točka. To je končna podoba faznega portreta.

Opazujmo sliki 6.2 in 6.3 ter sistem (6.26). Imamo štiri negibne točke. Tri izmed njih $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 0) = (\pi, 0)$, ki predstavljajo gibanje po izrojeni elipsi - daljici, so *centri*: okrog njih potekajo sklenjeni fazni tiri. Prvi dve predstavljata gibanji vzdolž osi z. Sila magnetnega polja na elektron ima v teh dveh primerih ves čas velikost 0. Točka $(0, 0) = (\pi, 0)$ predstavlja gibanje elektrona v ravnini (x, y). V tem primeru tudi smer sile magnetnega polja na elektron ves čas leži v ravnini (x, y). Četrta negibna točka $(*, L)$, ki predstavlja kroženje, je *sedlo*: po nekaterih tirih se točka, ki jo spravimo iz mirovanja, od sedla oddaljuje, po drugih pa približuje. Imamo tudi dva fazna tira, ki vodita proč od te negibne točke in se vanjo spet vračata. To sta *homoklinični orbiti*. Predstavljata gibanji, ko gibanje po krožnici nekaj zmoti, da krožnica postane elipsa z veliko polosjo, ki je za $g_0 = 63,4°$ (velja namreč $3 + 5\cos 2g_0 = 0$) odklonjena od ravnine (x, y) oziroma za $26,6°$ od smeri magnetnega polja. Smer velike polosi ostaja ves čas enaka ($\dot{g} = 0$), velika polos elipse je tudi ves čas enaka ($\dot{L} = 0$), mala polos elipse se manjša, dokler se elipsa ne izrodi v daljico in se smer gibanja spremeni, potem pa se elipsa spet začne "debeliti" in bo gibanje šele po neskončnem času postalo spet kroženje. Seveda je to opis gibanja glede na vrteči koordinatni sistem.

6.1 Odraz vrtenja koordinatnega sistema na Hamiltonianu

Nekateri avtorji za opis gibanja namesto enačb gibanja raje uporabljajo Hamiltonian. Videli smo, da se enačbe gibanja (6.1) oziroma (6.2) pri prehodu v koordinatni sistem, ki se vrti s kotno hitrostjo $\Omega = -\omega = -\frac{qb}{2m}$ okrog osi z, transformirajo v enačbe (6.21). Oglejmo si, kaj se pri tem zgodi s pripadajočim Hamiltonianom. Pot nas bo vodila takole: "uganili" bomo Lagrangian, ki pripada sistemu (6.1), iz njega bomo dobili Hamiltonian in kanonski sistem, na katerem bomo uporabili splošno formulo za spremembo koordinat, nazadnje pa bomo še transformiranemu kanonskemu sistemu poiskali Hamiltonian.

Označimo Coulombov potencial $U := -\frac{kq^2}{r}$. Z njim zapišemo sistem (6.1)

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \operatorname{grad} U \tag{6.27}$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2}q(\mathbf{R} \times \mathbf{B})\right) = \frac{1}{2}q(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \operatorname{grad} U. \tag{6.28}$$

Definirajmo Lagrangian

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2m}\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}\rangle + \frac{q}{2}\langle \mathbf{B} \times \mathbf{R}, \mathbf{V}\rangle - U. \tag{6.29}$$

Parcialni odvodi v vektorski obliki so

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{V}} &= \mathbf{p} - \frac{q}{2}(\mathbf{R} \times \mathbf{B}),\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{R}} &= -\frac{q}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}\langle \mathbf{R}, \mathbf{B} \times \mathbf{V}\rangle - \operatorname{grad} U = \frac{q}{2}\mathbf{V} \times \mathbf{B} - \operatorname{grad} U.\end{aligned}$$

Če označimo $\boldsymbol{\mathcal{Q}} := \mathbf{R}$, potem je enačba (6.28) ravno

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{Q}}}.$$

Lagrangian (6.29) res pripada sistemu (6.27).

Spremenljivki $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = (x, y, z)$ poiščimo konjugirani impulz $\boldsymbol{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z)$:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}}(\boldsymbol{\mathcal{Q}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}) = \mathbf{p} - \frac{q}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}} \times \mathbf{B}.$$

Od tod dobimo

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\mathcal{P}} + \frac{q}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}} \times \mathbf{B}$$

in Hamiltonian

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \langle \boldsymbol{\mathcal{P}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \rangle - \mathcal{L} = \left\langle \mathbf{p} - \frac{q}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}} \times \mathbf{B}, \mathbf{V} \right\rangle - \frac{1}{2m}\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{q}{2}\langle \mathbf{B} \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}, \mathbf{V} \rangle + U(\boldsymbol{\mathcal{Q}}) = \\ &= \frac{1}{2m}\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + U(\boldsymbol{\mathcal{Q}}) = \frac{1}{2m}\left\langle \boldsymbol{\mathcal{P}} + \frac{q}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}} \times \mathbf{B}, \boldsymbol{\mathcal{P}} + \frac{q}{2}\boldsymbol{\mathcal{Q}} \times \mathbf{B} \right\rangle + U(\boldsymbol{\mathcal{Q}}).\end{aligned}$$

Ko upoštevamo gostoto magnetnega polja $\mathbf{B} = (0, 0, b)$ in oznako $\omega = \frac{1}{2m}qb$, dobimo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2 + \mathcal{P}_z^2) + \omega(y\mathcal{P}_x - x\mathcal{P}_y) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{kq^2}{r}. \qquad (6.30)$$

Zapišimo še kanonski sistem $\dot{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} = \partial\mathcal{H}/\partial\boldsymbol{\mathcal{P}}$, $\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}} = -\partial\mathcal{H}/\partial\boldsymbol{\mathcal{Q}}$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\mathcal{P}_x}{m} + \omega y, \\ \dot{y} &= \frac{\mathcal{P}_y}{m} - \omega x, \\ \dot{z} &= \frac{\mathcal{P}_z}{m}, \\ \dot{\mathcal{P}}_x &= \omega\mathcal{P}_y - m\omega^2 x - \frac{kq^2}{r^3}x, \\ \dot{\mathcal{P}}_y &= -\omega\mathcal{P}_x - m\omega^2 y - \frac{kq^2}{r^3}y, \\ \dot{\mathcal{P}}_z &= -\frac{kq^2}{r^3}z. \qquad (6.31)\end{aligned}$$

Preselimo se v koordinatni sistem, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo Ω okrog osi z. Lagrangian (6.29) enačb gibanja (6.2) lahko zapišemo

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m\omega(y\dot{x} - x\dot{y}) + \frac{kq^2}{r}$$

in po njegovem zgledu brž uganemo še Lagrangian, ki pripada enačbam gibanja v vrtečem koordinatnem sistemu (6.20):

$$\mathcal{L}^\circ = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m(\omega + \Omega)(y\dot{x} - x\dot{y}) + \frac{m}{2}(2\omega\Omega + \Omega^2)(x^2 + y^2) + \frac{kq^2}{r}.$$

Spremenljivkam x, y, z izračunajmo konjugirane impulze $\mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}_y$, $\mathcal{P}_z$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_x &= \frac{\partial\mathcal{L}^\circ}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} - m(\omega + \Omega)y, \\ \mathcal{P}_y &= \frac{\partial\mathcal{L}^\circ}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} + m(\omega + \Omega)x, \\ \mathcal{P}_z &= \frac{\partial\mathcal{L}^\circ}{\partial\dot{z}} = m\dot{z}.\end{aligned}$$

Od tod izrazimo $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ s pomočjo kanonskih spremenljivk x, y, z, $\mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}_y$, $\mathcal{P}_z$. Dobljene izraze vstavimo v Hamiltonian $\mathcal{H}^\circ = \langle\, (\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z), (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\,\rangle - \mathcal{L}^\circ$. Dobimo

$$\mathcal{H}^\circ = \frac{1}{2m}(\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2 + \mathcal{P}_z^2) + (\omega + \Omega)(y\mathcal{P}_x - x\mathcal{P}_y) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{kq^2}{r}.$$

Koordinatni sistem se vrti s kotno hitrostjo $\Omega = -\omega = -\frac{qb}{2m}$, zato je v tem koordinatnem sistemu Hamiltonian

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{2m}(\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2 + \mathcal{P}_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{kq^2}{r}. \tag{6.32}$$

Primerjajmo Hamiltonovi funkciji (6.30) in (6.32). Opazimo, da se je s tem, ko smo se postavili v vrteč koordinatni sistem z ustrezno kotno hitrostjo, Hamiltonian poenostavil. Izginil je člen $\omega(y\mathcal{P}_x - x\mathcal{P}_y)$, ki se imenuje Zeemanov člen[4].

Dodajmo še to, da je Zeemanov člen na rešitvah sistema (6.31) konstanten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\omega(y\mathcal{P}_x - x\mathcal{P}_y)) &= \omega(\dot{y}\mathcal{P}_x + y\dot{\mathcal{P}}_x - \dot{x}\mathcal{P}_y - x\dot{\mathcal{P}}_y) = \\
&= \omega\Bigg((\frac{\mathcal{P}_y}{m} - \omega x)\mathcal{P}_x + y(\omega\mathcal{P}_y - m\omega^2 x - \frac{kq^2}{r^3}x) \\
&\quad -(\frac{\mathcal{P}_x}{m} + \omega y)\mathcal{P}_y - x(-\omega\mathcal{P}_x - m\omega^2 y - \frac{kq^2}{r^3}y)\Bigg) = 0.
\end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je to ravno konstanta gibanja, ki ustreza konstanti gibanja H, ki smo jo našli v vrtečem koordinatnem sistemu.

Imamo torej dva prva integrala sistema (6.31): Hamiltonian (6.30) (oziroma energijo, oziroma Delaunayevo spremenljivko L) in Zeemanov člen. Vprašanje, če lahko najdemo še kakšen prvi integral obravnavanega sistema, je zahtevno. V [4] je omenjen članek Marka Robnika[5] z Univerze v Mariboru *Journal of Physics A (1981) 14: Hydrogen atom in a strong magnetic field: on the existence of the third integral of motion.* Omenjen je tudi obširen pregledni članek o diamagnetičnem Keplerjevem problemu istega avtorja iz leta 1989.

[4]Pieter Zeeman (1865-1943) je bil nizozemski fizik, Nobelov nagrajenec.
[5]Marko Robnik (1955-) je slovenski fizik.

7 Sklopljeni nihali

Oglejmo si nihalo z dolžino L in maso m, pri katerem kot odmika od navpičnice v pozitivni smeri označimo s θ, gravitacijski pospešek pa z g. Pri tem naj bo točkasta masa m obešena na palico z zanemarljivo maso. Kinetična energija masne točke je $K = \frac{m}{2}(L\dot{\theta})^2$, potencialna energija pa $U = -mgL\cos\theta$. Obstaja več ekvivalentnih načinov , kako dobiti enačbe gibanja. Mi bomo uporabili Lagrangevo formulacijo. Lagrangian sistema je

$$\mathcal{L} := K - U = \frac{m(L\dot{\theta})^2}{2} + mgL\cos\theta.$$

Euler-Lagrangeva enačba

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

nam da enačbo gibanja za nihalo

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0.$$

Sedaj si na sliki 7.1 oglejmo dve enaki sklopljeni nihali. Vzmet, s katero sta nihali

Slika 7.1: Sklopljeni matematični nihali

sklopljeni, naj bo linearna s koeficientom k. To je, ustreza naj Hookovemu zakonu $F = kd$, kjer je F sila vzmeti, k koeficient vzmeti in d raztezek vzmeti. Taka vzmet ima prožnostno oziroma potencialno energijo $W = \frac{kd^2}{2}$. Vzmet naj bo pritrjena na nihali v oddaljenosti ℓ od pritrdišč nihal. Oddaljenost pritrdišč nihal označimo z S. Tudi dolžina vzmeti, ko ni raztegnjena, naj bo S. Hitro se da pokazati, da je v našem primeru raztezek vzmeti

$$d = \ell(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) + O\left(\left(\frac{\ell}{S}\right)^2\right).$$

Naj bo dolžina ℓ majhna v primerjavi z S. Potem za raztezek lahko rečemo

$$d \approx \ell(\sin\theta_2 - \sin\theta_1).$$

Tako je Lagrangian za naš sistem

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left((L\dot\theta_1)^2 + (L\dot\theta_2)^2\right) + mgL(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) - \frac{k\ell^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2}{2}$$

in enačbi gibanja sta

$$\begin{aligned} mL^2\ddot\theta_1 + mgL\sin\theta_1 - k\ell^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_1 &= 0, \\ mL^2\ddot\theta_2 + mgL\sin\theta_2 + k\ell^2(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

S pomočjo nove spremenljivke s takole reskalirajmo čas: $t = (L/g)^{1/2}s$. S tem postanejo čas in parametri sistema brezdimenzijski. Izračunajmo

$$\theta' = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot\theta\sqrt{\frac{L}{g}}, \qquad \theta'' = \frac{d\theta'}{ds} = \frac{d\theta'}{dt}\frac{dt}{ds} = \ddot\theta\frac{L}{g}.$$

Definirajmo tudi brezdimenzijsko konstanto $\alpha := k\ell^2/(mgL)$ in v enačbah gibanja zamenjajmo spremenljivke. Dobimo sistem

$$\begin{aligned} \theta_1'' + \sin\theta_1 - \alpha(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_1 &= 0, \\ \theta_2'' + \sin\theta_2 + \alpha(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\cos\theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Obravnavajmo gibanje sistema v primeru “majhnih” nihanj. Aproksimacija $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$, ki pripada linearizaciji sistema diferencialnih enačb v izhodišču, nam da

$$\begin{aligned} \theta_1'' + (1+\alpha)\theta_1 - \alpha\theta_2 &= 0, \\ \theta_2'' - \alpha\theta_1 + (1+\alpha)\theta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Spotoma si oglejmo še sklopljeni nihali na vijačno vzmet (glej sliko 7.2). Imamo dve nihali, pri katerih je masa m pritrjena na vzmet s koeficientom k. Sklopljeni sta z vzmetjo s koeficientom k_S. Vsota dolžin vzmeti je enaka oddaljenosti pritrdišč nihal. Spremenljivki x_1 in x_2 nam merita odmik masnih točk od mirovne lege. Lagrangian za ta mehanski sistem je

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot x_2^2\right) - \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} - \frac{k_S(x_2 - x_1)^2}{2},$$

enačbi gibanja pa sta

$$\begin{aligned} m\ddot x_1 + kx_1 - k_S(x_2 - x_1) &= 0, \\ m\ddot x_2 + kx_2 + k_S(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Slika 7.2: Sklopljeni nihali na vijačno vzmet

Tudi tu reskalirajmo čas: $t = \sqrt{m/k}\ s$. Tako dobimo $x' = \frac{dx}{ds} = \dot{x}\sqrt{m/k}$, $x'' = \frac{dx'}{ds} = \ddot{x}\ m/k$. Definirajmo še konstanto $\alpha = k_S/k$ pa dobimo sistem

$$\begin{aligned} x_1'' + (1+\alpha)x_1 - \alpha x_2 &= 0, \\ x_2'' - \alpha x_1 + (1+\alpha)x_2 &= 0, \end{aligned}$$

ki je popolnoma enak sistemu (7.1).

Sistem (7.1) je linearni sistem drugega reda. Lahko ga zapišemo kot sistem prvega reda in ga rešimo na običajen način tako, da poiščemo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike sistema. Vendar zaradi posebne oblike, ki jo ima ta sistem, obstaja preprostejša pot za reševanje. Označimo

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -(1+\alpha) & \alpha \\ \alpha & -(1+\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Theta} := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

pa sistem dobi obliko

$$\mathbf{\Theta}'' = \mathbf{A}\mathbf{\Theta}. \tag{7.2}$$

Simetrično matriko $\mathbf{A}$ lahko diagonaliziramo s pomočjo ortogonalne prehodne matrike. V našem primeru dobimo $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$, kjer je

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-2\alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Spremenljivki θ_1, θ_2 sistema (7.2) zamenjamo z novima spremenljivkama x, y, ki naj bosta komponenti vektorja $\mathbf{Z}$, takole: $\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Theta}$. Dobimo

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + \theta_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \theta_2). \tag{7.3}$$

Sistem (7.2) je sedaj

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}'' &= \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Theta}, \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Theta}'' &= \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Theta}, \\ \mathbf{Z}'' &= \mathbf{D}\mathbf{Z} \end{aligned}$$

oziroma po komponentah

$$x'' = -x, \qquad y'' = -(1+2\alpha)y. \tag{7.4}$$

Naš sistem enačb smo razklopili. Rešitvi obeh enačb sistema (7.4) sta sinusni nihanji. Če izberemo tako rešitev sistema (7.4), v kateri je prisotno le eno sinusno nihanje (amplituda preostalega oziroma preostalih pa je 0) in preko enačb (7.3) poiščemo pripadajočo rešitev prvotnega sistema, dobimo posebne vrste rešitev prvotnega sistema (7.1). V tem posebnem primeru oba oziroma vsi deli sistema nihajo sinusno z isto frekvenco in isto fazo (če se ne oziramo na smer nihanja). Tako nihanje imenujemo *lastno nihanje*. Oglejmo si lastni nihanji v našem primeru. Če izberemo rešitev sistema (7.4), v kateri je $y(s) \equiv 0$, iz (7.3) dobimo $\theta_1(s) - \theta_2(s) \equiv 0$ in nihali nihata "v fazi" s krožno frekvenco 1 glede na skalirani čas. Če izberemo rešitev, v kateri je $x(s) \equiv 0$, potem je $\theta_1(s) + \theta_2(s) \equiv 0$ in nihali nihata "v nasprotni fazi" s krožno frekvenco $(1+2\alpha)^{1/2}$ glede na skalirani čas. Frekvenca drugega lastnega nihanja je večja od frekvence prvega lastnega nihanja zaradi delovanja vzmeti; vzmet pri prvem lastnem nihanju nima nobenega vpliva.

Oglejmo si naslednji poskus. Drugo nihalo malo odmaknimo in ga spustimo. Kaj se zgodi?

V našem matematičnem modelu so začetni pogoji poskusa

$$\theta_1(0) = 0, \qquad \theta_1'(0) = 0, \qquad \theta_2(0) = a, \qquad \theta_2'(0) = 0.$$

Splošna rešitev sistema (7.4) je

$$x(s) = T\cos s + U\sin s, \qquad y(s) = V\cos(\beta s) + W\sin(\beta s), \tag{7.5}$$

kjer so T, U, V, W konstante in $\beta := \sqrt{1+2\alpha}$. Iz (7.3) dobimo

$$x(0) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad x'(0) = 0, \qquad y(0) = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y'(0) = 0.$$

To upoštevamo v (7.5) in dobimo

$$T = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad U = 0, \qquad V = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad W = 0.$$

Torej se naš sistem giblje takole:

$$x(s) = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos s, \qquad y(s) = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\beta s)$$

oziroma, ko iz (7.3) izluščimo θ_1 in θ_2,

$$\theta_1(s) = \frac{a}{2}(\cos s - \cos\beta s), \qquad \theta_2(s) = \frac{a}{2}(\cos s + \cos\beta s).$$

Uporabimo še običajne identitete za pretvarjanje vsote v produkt pa dobimo

$$\theta_1(s) = \left(a \sin \frac{\beta - 1}{2} s\right) \sin \frac{\beta + 1}{2} s, \qquad \theta_2(s) = \left(a \cos \frac{\beta - 1}{2} s\right) \cos \frac{\beta + 1}{2} s.$$

Na ti dve funkciji lahko gledamo kot na nihanji s krožno frekvenco $\frac{\beta+1}{2}$ in z (relativno) počasi spreminjajočo se amplitudo. Ta pojav imenujemo *utripanje*. Utripanje prvega nihala ni v fazi z utripanjem drugega nihala. Če je s približno sod večkratnik od $\pi/(\beta - 1)$, potem prvo nihalo skoraj miruje. Če pa je vrednost od s približno enaka lihemu večkratniku od $\pi/(\beta - 1)$, potem drugo nihalo skoraj miruje. Ta zanimiv pojav izmenjave energije lahko opazujemo tudi z zelo okornimi eksperimentalnimi pripomočki.

8 Veriga sklopljenih oscilatorjev

Analizo malih nihanj sklopljenih nihal iz 7. poglavja lahko v več smereh posplošimo. Tu si bomo ogledali slavni primer Fermija[1], Ulama[2] in Paste[3]. Predstavljamo si ga lahko kot zaporedje mas, ki so z vzmetmi sklopljene z najbližjima sosedoma. Model so avtorji dobili z diskretizacijo parcialne diferencialne enačbe modela strune.

Oglejmo si N enakih mas, ki so razporejene vzdolž ravne črte kot na sliki 8.1. Mase naj bodo vezane tako, da se lahko gibljejo le vzdolž omenjene črte, to je

Slika 8.1: Prikaz oscilatorja Fermija, Ulama in Paste

longitudinalno. Mase naj bodo sklopljene z vzmetmi. Prva in zadnja naj bosta pripeti na mirujočo oporo. Če x_k označuje odmik k-te mase od mirovne lege, potem so po drugem Newtonovem zakonu enačbe gibanja

$$m\ddot{x}_k = F(x_{k+1} - x_k) - F(x_k - x_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, N-2,$$

kjer je $F(x_{k+1} - x_k)$ sila, ki deluje na k-to maso z desne, in $-F(x_k - x_{k-1})$ sila, ki deluje na k-to maso z leve.

Eden od modelov Fermija, Ulama in Paste uporablja zakon

$$F(z) = \alpha(z + \beta z^2), \qquad \alpha > 0,\ \beta \geq 0,$$

ki modelira silo nelinearne vzmeti. Ta izbira nas pripelje do naslednjih enačb gibanja:

$$m\ddot{x}_k = \alpha(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}) + \alpha\beta(x_{k+1}^2 - 2x_k x_{k+1} + 2x_{k-1}x_k - x_{k-1}^2)$$

oziroma

$$m\ddot{x}_k = \alpha(x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1})(1 + \beta(x_{k+1} - x_{k-1})), \qquad k = 1, \ldots, N-2. \tag{8.1}$$

Poleg njih imamo še robna pogoja

$$x_0(t) \equiv 0, \qquad x_{N-1}(t) \equiv 0.$$

[1]Enrico Fermi (1901-1954) je bil italijansko-ameriški fizik, Nobelov nagrajenec.
[2]Stanislaw Marcin Ulam (1909-1984) je bil poljsko-ameriški matematik.
[3]John R. Pasta je ameriški fizik.

8.1 Sklopitev z linearnimi vzmetmi

Če v enačbah (8.1) postavimo $\beta = 0$, dobimo linearizacijo sistema (8.1) v točki, ki pripada mirovnim legam mas. Poiskati želimo lastna nihanja in splošno rešitev te linearizacije.

Definirajmo vektor stanj $\mathbf{x}$ s komponentami $(x_1, x_2, \ldots, x_{N-2})$ in zapišimo sistem v matrični obliki

$$\ddot{\mathbf{x}} = c^2\mathbf{Q}\mathbf{x}, \tag{8.2}$$

kjer je $c^2 = \alpha/m$ in

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \ldots & \\ 0 & \ldots & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Realno simetrično matriko $\mathbf{Q}$ lahko s pomočjo ortogonalne prehodne matrike diagonaliziramo:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1},$$

kjer je $\mathbf{D}$ diagonalna matrika, ki ima na diagonali lastne vrednosti λ_ℓ, $\ell = 1, ..., N-2$ matrike $\mathbf{Q}$, $\mathbf{B}$ pa ortogonalna matrika, v kateri so stolpci kar lastni vektorji matrike $\mathbf{Q}$. Ker je matrika $\mathbf{Q}$ negativno definitna, so njene lastne vrednosti negativne. Označimo

$$\mathbf{y} := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} \tag{8.3}$$

pa sistem (8.2) dobi obliko

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= c^2\mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}, \\ \mathbf{B}^{-1}\ddot{\mathbf{x}} &= c^2\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}, \\ \ddot{\mathbf{y}} &= c^2\mathbf{D}\mathbf{y} \end{aligned} \tag{8.4}$$

oziroma po komponentah

$$\ddot{y}_\ell = c^2\lambda_\ell y_\ell, \qquad \ell = 1, \ldots, N-2. \tag{8.5}$$

S tem je naš sistem razklopljen. Sistem (8.4) ima torej splošno rešitev $\mathbf{y}(t)$, v kateri so komponente

$$y_\ell(t) = R_\ell \cos(c\sqrt{-\lambda_\ell}\, t + \rho_\ell), \qquad \ell = 1, \ldots, N-2 \tag{8.6}$$

oziroma

$$y_\ell(t) = \gamma_\ell \cos(c\sqrt{-\lambda_\ell}\, t) + \eta_\ell \sin(c\sqrt{-\lambda_\ell}\, t), \qquad \ell = 1, \ldots, N-2, \tag{8.7}$$

kjer so R_ℓ, ρ_ℓ, γ_ℓ, η_ℓ od začetnih pogojev odvisne konstante. Preko zveze (8.3) dobimo še splošno rešitev naloge (8.2)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{y}(t). \tag{8.8}$$

Če je le ena od komponent (8.6) neničelna, dobimo rešitev sistema (8.2) oblike

$$\mathbf{x}(t) = R\cos(c\sqrt{-\lambda}\,t + \rho)\mathbf{v}, \tag{8.9}$$

ki ponazarja lastno nihanje mehanskega sistema. Pri tem λ označuje neko lastno vrednost matrike $\mathbf{Q}$, $\mathbf{v}$ njej pripadajoči lastni vektor (ne nujno normiran), R in ρ pa označujeta konstanti. Splošna rešitev sistema (8.2) je kar enaka vsoti rešitev oblike (8.9), ki pripadajo posameznim lastnim nihanjem.

Poiščimo lastne vrednosti matrike $\mathbf{Q}$. Naj bo $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{N-2})$ lastni vektor matrike $\mathbf{Q}$ pri lastni vrednosti λ. Enačbo $\mathbf{Q}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ zapišemo po komponentah

$$v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1} = \lambda v_k, \qquad k = 1, \ldots, N-2,$$

pri tem pa zahtevamo $v_0 = 0$ in $v_{N-1} = 0$. Torej moramo rešiti rekurzivno enačbo. Rešitev iščemo z nastavkom $v_k = a^k$:

$$a^{k-1} - 2a^k + a^{k+1} = \lambda a^k.$$

Rešitev dobimo natanko tedaj, ko je

$$a^2 - (2+\lambda)a + 1 = 0. \tag{8.10}$$

Ena od rešitev te enačbe je

$$r = \frac{2 + \lambda + \sqrt{\lambda(4+\lambda)}}{2},$$

Vietovi formuli[4] pa povesta, da je produkt obeh rešitev 1. Druga rešitev je torej r^{-1}. Splošna rešitev linearne rekurzivne enačbe je torej

$$v_k = \mu r^k + \nu r^{-k},$$

kjer sta μ in ν poljubni konstanti. Upoštevajmo še robna pogoja $v_0 = 0$ in $v_{N-1} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu + \nu, \\ 0 &= \mu r^{N-1} + \nu r^{-(N-1)}. \end{aligned}$$

[4]Francois Viete (1540-1603) je bil francoski matematik.

Dobimo $\mu = -\nu$ in $r^{2(N-1)} = 1$. Torej so možne izbire za r koreni enote

$$r_\ell = e^{\pi i\ell/(N-1)}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, 2N-3.$$

V enačbo (8.10) za a vstavimo r_ℓ, da dobimo pripadajočo lastno vrednost:

$$e^{2\pi i\ell/(N-1)} - (2 + \lambda_\ell)e^{\pi i\ell/(N-1)} + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\lambda_\ell &= e^{-\pi i\ell/(N-1)} + e^{\pi i\ell/(N-1)} - 2, \\
\lambda_\ell &= 2\cos\left(\frac{\pi\ell}{N-1}\right) - 2, \\
\lambda_\ell &= -4\sin^2\left(\frac{\pi\ell}{2(N-1)}\right).
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Lastne vrednosti dobimo pri $\ell = 1, \ldots, N-2$. Da to opazimo, si oglejmo zaporedje števil ℓ v obliki

$$0, 1, \ldots, N-2, N-1, (N-1)+1, \ldots, (N-1)+N-2.$$

Pripadajoče vrednosti r_ℓ so

$$1, r_1, \ldots, r_{N-2}, -1, -r_1, \ldots, -r_{N-2}$$

in pripadajoče vrednosti λ_ℓ so

$$0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-2}, -4, \lambda_{N-2}, \ldots, \lambda_1.$$

Izbiri $r = 1$ (pri $\ell = 0$) in $r = -1$ (pri $\ell = N-1$) dasta zaporedji $v_k \equiv 0$. Torej nam ne dasta lastnih vrednosti. V (8.11) tudi opazimo, da so lastne vrednosti $(N-2) \times (N-2)$ matrike $\mathbf{Q}$ pri izbiri indeksov $\ell = 1, \ldots, N-2$ različne.

Sedaj, ko lastne vrednosti imamo, nam rešitev rekurzivne enačbe pove, kakšni so lastni vektorji. Komponente lastnega vektorja, ki pripada lastni vrednosti λ_ℓ, so

$$v_k = \mu\left(e^{\pi i\ell k/(N-1)} - e^{-\pi i\ell k/(N-1)}\right) = 2i\mu\sin\left(\frac{\pi\ell k}{N-1}\right),$$

kjer je μ konstanta. Če izberemo $\mu = 1/(2i)$, potem ima za $\ell = 1, \ldots, N-2$ pripadajoči lastni vektor $\mathbf{v}^\ell$ komponente

$$v_k^\ell = \sin\left(\frac{\pi\ell k}{N-1}\right). \tag{8.12}$$

Ker je $\mathbf{Q}$ simetrična matrika, so njeni lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, ortogonalni. Še normirajmo jih. Izračunajmo

$$\langle \mathbf{v}^\ell, \mathbf{v}^\ell \rangle = \sum_{k=1}^{N-2} \sin^2\left(\frac{\pi \ell k}{N-1}\right).$$

V vsoti uporabimo identiteto

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

in poiščimo vsote geometrijskih zaporedij, ki jih dobimo:

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{v}^\ell, \mathbf{v}^\ell \rangle = \sum_{k=1}^{N-2} -\frac{1}{4}(e^{i\pi\ell k/(N-1)} - e^{-i\pi\ell k/(N-1)})^2 = \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N-2}(e^{i2\pi\ell k/(N-1)} - 2 + e^{-i2\pi\ell k/(N-1)}) = \\
&-\frac{1}{4}\left(e^{i2\pi\ell/(N-1)}\frac{e^{i2\pi\ell(N-2)/(N-1)} - 1}{e^{i2\pi\ell/(N-1)} - 1} - 2(N-2) + e^{-i2\pi\ell/(N-1)}\frac{e^{-i2\pi\ell(N-2)/(N-1)} - 1}{e^{-i2\pi\ell/(N-1)} - 1}\right) \\
&= -\frac{1}{4}(-1 - 2(N-2) - 1) = \frac{N-1}{2}.
\end{aligned}$$

Torej vektorji

$$\mathbf{b}^1 := \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\mathbf{v}^1, \qquad \ldots, \qquad \mathbf{b}^{N-2} := \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\mathbf{v}^{N-2} \tag{8.13}$$

tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^{N-2}$. To so ravno stolpci matrike $\mathbf{B}$.

Zveza (8.8) nam skupaj z (8.7), (8.13), (8.11) in (8.12) da splošno rešitev sistema (8.2):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{\ell=1}^{N-2} y_\ell(t)\mathbf{b}^\ell = \qquad (8.14)\\
&= \sum_{\ell=1}^{N-2}\Big(\gamma_\ell\cos(c\sqrt{-\lambda_\ell}\,t) + \eta_\ell\sin(c\sqrt{-\lambda_\ell}\,t)\Big)\,\mathbf{b}^\ell = \\
&= \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\sum_{\ell=1}^{N-2}\Big(\gamma_\ell\cos(c\sqrt{-\lambda_\ell}\,t) + \eta_\ell\sin(c\sqrt{-\lambda_\ell}\,t)\Big)\,\mathbf{v}^\ell = \\
&= \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\sum_{\ell=1}^{N-2}\left(\gamma_\ell p_\ell(t) + \eta_\ell q_\ell(t)\right)\mathbf{v}^\ell,
\end{aligned}$$

kjer je

$$p_\ell(t) = \cos\left(2ct\sin\left(\frac{\pi\ell}{2(N-1)}\right)\right), \qquad q_\ell(t) = \sin\left(2ct\sin\left(\frac{\pi\ell}{2(N-1)}\right)\right),$$

$c^2 = \alpha/m$, γ_ℓ in η_ℓ pa so realne konstante. Komponente splošne rešitve so

$$x_k(t) = \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\sum_{\ell=1}^{N-2}(\gamma_\ell p_\ell(t) + \eta_\ell q_\ell(t))\sin\left(\frac{\pi\ell k}{N-1}\right).$$

Začetni vrednosti splošne rešitve in njenega odvoda sta

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(0) &= \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\sum_{\ell=1}^{N-2}\gamma_\ell\mathbf{v}^\ell,\\
\dot{\mathbf{x}}(0) &= 2c\left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\sum_{\ell=1}^{N-2}\eta_\ell\sin\left(\frac{\pi\ell}{2(N-1)}\right)\mathbf{v}^\ell.
\end{aligned}$$

Identiteti skalarno množimo z $\mathbf{v}^\ell$. Upoštevajmo $\langle\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^\ell\rangle = 0$, če $k \neq \ell$, in $\langle\mathbf{v}^\ell, \mathbf{v}^\ell\rangle = (N-1)/2$. S tem smo izrazili koeficiente γ_ℓ in η_ℓ,

$$\gamma_\ell = \left\langle\mathbf{x}(0), \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\mathbf{v}^\ell\right\rangle, \qquad \eta_\ell = \left\langle\dot{\mathbf{x}}(0), \left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2}\frac{1}{2c\sin\frac{\pi\ell}{2(N-1)}}\mathbf{v}^\ell\right\rangle.$$

Če imamo dana začetna pogoja $\mathbf{x}(0)$ in $\dot{\mathbf{x}}(0)$, potem koeficientov γ_ℓ i η_ℓ ni težko izračunati.

8.2 Oscilator Fermija, Ulama in Paste

Sedaj, ko smo določili lastna nihanja in splošno rešitev lineariziranega sistema (ko je v (8.1) $\beta = 0$), si lahko ogledamo eksperimente Fermija, Ulama in Paste.

Splošna rešitev sistema (8.2) je enaka vsoti lastnih nihanj (glej (8.14)). Lastno nihanje $y_\ell(t)\mathbf{b}^\ell$ je nihanje, pri katerem je odmik komponente mehanskega sistema (to je masne točke) enak vrednosti sinusne funkcije $y_\ell(t)$, pomnoženi s koeficientom iz vektorja $\mathbf{b}^\ell$. Sinusno nihanje $y_\ell(t)$ ima konstantno amplitudo in fazo (glej (8.6)). Od amplitude nihanja je odvisna njegova energija, ki je seveda tudi konstantna. Izrazimo energijo nihanja z vrednostjo funkcije $y_\ell(t)$ in vrednostjo njenega odvoda $\dot{y}_\ell(t)$:

$$\begin{aligned}
&y_\ell(t) = R_\ell\cos(c\sqrt{-\lambda_\ell}\,t + \rho_\ell),\\
&\dot{y}_\ell(t) = -c\sqrt{-\lambda_\ell}\,R_\ell\sin(c\sqrt{-\lambda_\ell}\,t + \rho_\ell),\\
&y_\ell^2 + \left(\dot{y}_\ell/\left(-c\sqrt{-\lambda_\ell}\right)\right)^2 = R_\ell^2,\\
&E_\ell := \frac{1}{2}\dot{y}_\ell(t)^2_{max} = \frac{1}{2}c^2(-\lambda_\ell)R_\ell^2 = \frac{1}{2}(\dot{y}_\ell^2 - c^2\lambda_\ell y_\ell^2).
\end{aligned}$$

To je energija ℓ-tega lastnega nihanja. Iz trenutnega stanja sistema jo ni težko izračunati. Iz (8.14) in (8.13) namreč dobimo

$$\left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{v}^\ell \rangle = y_\ell,$$
$$\left(\frac{2}{N-1}\right)^{1/2} \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{v}^\ell \rangle = \dot{y}_\ell.$$

Videli smo, da je sistem enačb (8.1) v primeru $\beta = 0$ linearni sistem, temu pa pripadajo lastna nihanja s konstantno energijo. Fermi, Ulam in Pasta pa so proučevali nelinearni oscilator: v sistemu (8.1) so izbrali $\beta \neq 0$. Pričakovali so, da se bodo v tem primeru energije lastnih nihanj pripadajočega linearnega sistema $E_\ell(t)$ po dovolj dolgem času izenačile. Proces, ki vodi v stanje "enakomerne porazdeljenosti energije", imenujemo *termalizacija*. Avtorji so v omenjenih poskusih izbrali začetne pogoje, pri katerih je energija le enega lastnega nihanja neničelna. S pomočjo numeričnega integriranja so opazovali razvoj sistema. Namen njihovih eksperimentov je bil določiti čas, ki je potreben, da pride do termalizacije. V nasprotju s pričakovanji so izidi poskusov kazali na to, da se termalizacija ne pojavi. Na primer pri neki izbiri parametrov se energija za nekaj časa porazdeli med različnimi lastnimi nihanji, nazadnje pa se skoraj vsa energija vrne v začetno lastno nihanje. Kasneje se na primer večina energije znajde v drugem lastnem nihanju in se čez nekaj časa spet vrne v prvo. In tako naprej. Pri kakšni drugi izbiri sistemskih parametrov ponavljanje ni bilo tako izrazito, toda noben eksperiment ni kazal na to, da se termalizacija pojavi. Pojasnjevanje tega "fenomena utripanja" in tega, da se termalizacija ne pojavi, vodi do lepih izpeljav matematike in matematične fizike. Zanimivo je, da so se prvi na računalniku izvedeni numerični eksperimenti s področja dinamike (v letih 1954, 1955) izkazali za tako pomembne.

Literatura

[1] Vladimir I. Arnol'd.
Dynamical Systems III.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.

[2] Carmen Chicone.
Ordinary Differential Equations with Applications.
Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands.
The Feynman Lectures on Physics I - III.
Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1963, 1964.

[4] Martin C. Gutzwiller.
Chaos in Classical and Quantum Mechanics.
Springer-Verlag, New York, 1990.

[5] Oliver Dimon Kellogg.
Foundations of Potential Theory.
Dover Publications, Inc., New York, 1953.

[6] France Križanič.
Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun.
Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.

[7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz.
The Classical Theory of Fields.
Course of Theoretical Physics, Volume 2.
Pergamon Press, Oxford, 1975.

[8] E. L. Stiefel, G. Scheifele.
Linear and Regular Celestial Mechanics.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1971.

[9] Janez Strnad.
Fizika, 1. del - 4. del.
Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS,
Zveza organizacij za tehnično kulturo SRS,
Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1982 - 1985.

[10] Egon Zakrajšek.
Analiza III.
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1998.