CASTILLONSKA NALOGA

Naloga: *V ravnini imamo dano krožnico K in n točk $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Konstruirati želimo $n-$kotnik, ki ima K za očrtano krožnico, točke $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pa ležijo na nosilkah njegovih stranic, na vsaki po ena.*

Nalogo bomo rešili z indukcijo na nekoliko neobičajen način. Ne bomo je delali po številu stranic tetivnega $n-$kotnika, ampak bomo privzeli, da je število stranic in danih točk fiksno.
Tako se naloga spremeni v naslednji **problem:**

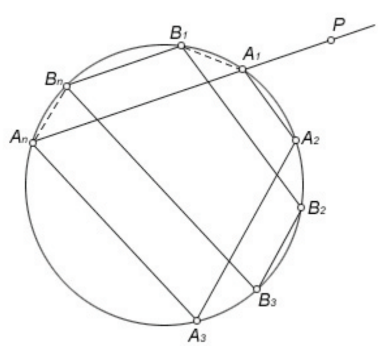
V ravnini imamo dano krožnico K. Kako konstruirati tetivni $n-$kotnik, če naj gre k njegovih stranic oz. nosilk stranic skozi k danih točk, ostalih $n-k$ stranic pa naj bo vzporednih $n-k$ danim premicam?

Indukcija bo pri tem tekla po številu k.

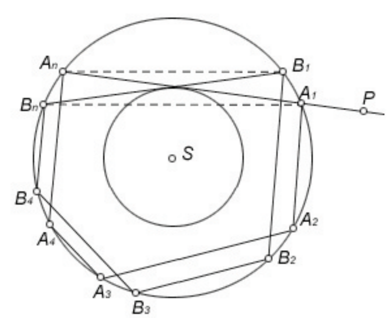
i) Za $k = 1$ imamo naslednjo **nalogo:**

V dano krožnico želimo včrtati $n-$kotnik, katerega ena stranica leži na premici skozi dano točko P, ostalih $n-1$ stranic pa je vzporednih danim premicam $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Recimo, da smo nalogo rešili. Brez škode za splošnost lahko rečemo, da nosilka stranice A_1A_n poteka skozi dano točko P, stranice $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ pa so vzporedne danim premicam $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Zaradi preglednosti slike premic $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ ne narišemo. Lahko si mislimo, da so te premice zaporedoma nosilke stranic $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ (sliki 1a in 1b).



Slika 1a



Slika 1b

Pojdimo sedaj v obratnem vrstnem redu, od konca proti začetku. Primerjajmo $n-$kotnik $A_1A_2 \ldots A_n$ s poljubnim $n-$kotnikom $B_1B_2 \ldots B_n$, ki je včrtan krožnici in katerga stranice $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{n-1}B_n$ so vzporedne premicam $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Trditev: *Loki A_1B_1, $A_2B_2, \dots, A_nB_n$ so skladni.*

Dokaz:
Vzemimo zrcaljenje čez premico, ki poteka skozi središče krožnice in je pravokotna na stranico A_1A_2 oz. na premico p_1. Označimo jo s q_1. Ta preslikava nam A_1 slika v A_2 in B_1 v B_2. Ker je zrcaljenje izometrija, sta tetivi A_1B_1 in A_2B_2 skladni. Prav tako tudi loka A_1B_1 in A_2B_2.
Na podoben način dokažemo, da sta loka oz. tetivi A_2B_2 in A_3B_3 skladni, če za premico zracljenja vzamemo premico, ki je pravokotna na stranico A_2A_3 oz. na premico p_2. Označimo to premico s q_2.
Podobno si izberemo premice $q_3, q_4, \dots, q_{n-1}$ in z zrcaljenji prek teh premic, dokažemo skladnost parov lokov A_iB_i in $A_{i+1}B_{i+1}$.
Torej res velja, da so loki A_iB_i skladni.

Konec dokaza. ■

Preden si pogledamo, kako so usmerjeni loki A_iB_i in $A_{i+1}B_{i+1}$ glede na krožnico, definirajmo preslikavo, ki preslika A_1 v A_n, B_1 v B_n, s pomočjo zrcaljenj preko premic q_i, ki smo jih že srečali v dokazu. Preslikavo zapišemo kot

$$F = Z_{q_1} \circ Z_{q_2} \circ \cdots \circ Z_{q_{n-1}}$$

Loka A_1B_1 in A_2B_2 sta nasprotno usmerjena glede na krožnico. Enako velja tudi za loka A_2B_2 in A_3B_3. Vidimo, da to velja za vse pare lokov do $A_{n-1}B_{n-1}$ in A_nB_n.
Za loka A_1B_1 in A_nB_n pa moramo ločiti 2 možnosti:

1. **n je sodo število**

   Loka A_1B_1 in A_nB_n sta nasprotno usmerjena glede na krožnico (slika 1a).

   Trditev: *Štirikotnik $A_1B_1B_nA_n$ je enakokrak trapez z osnovnicama A_1A_n in B_1B_n.*

   Dokaz: Preslikava F, definirana zgoraj, je kompozitum liho mnogo zrcaljenj, torej je zrcaljenje preko neke premice skozi središče krožnice. Vemo, da to zrcaljenje slika A_1 v A_n in B_1 v B_n. Stranici A_1A_n in B_1B_n sta tedaj pravokotni na premico zrcaljenja, torej sta vzporedni. Od prej že vemo, da sta tetivi A_1B_1 A_nB_n skladni. S tem je trditev dokazana.

   Konec dokaza. ■

   Torej n-kotnik $A_1A_2 \dots A_n$ konstruiramo takole:
   v krožnico vrišemo poljubni $n-$kotnik (recimo $B_1B_2 \dots B_n$) z $n-1$ stranicami, vzporednimi premicam $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Nato narišemo premico skozi dano točko P, vzporedno stranico B_1B_n. Dobimo nosilko stranice A_1A_n. Tam kjer premica, ki je vzporedna premici p_1 in gre skozi oglišče A_1, seka krožnico, dobimo oglišče A_2. Ostala oglišča dobimo na podoben način.

2. n **je liho število**

   Loka A_1B_1 in A_nB_n imata enako smer glede na krožnico (slika 1b).

   Trditev: *Razpolovišči tetiv A_1A_n in B_1B_n ležita na krožnici, ki je koncentrična dani krožnici.*

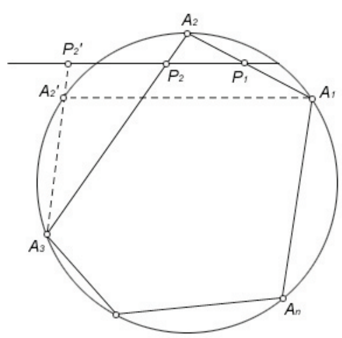
   Dokaz: Preslikava F je kompozitum sodo mnogo zrcaljenj in ohranja orientacijo, tudi lokov A_1B_1 in A_nB_n. Torej obstaja rotacija okrog središča krožnice, S, ki nam tetivo A_1A_n slika v tetivo B_1B_n. S to rotacijo se razpolovišče ene tetive slika v razpolovišče druge. Ker gre za rotacijo okrog središča S, sta razpolovišči enako oddaljeni od S. Torej res ležita na krožnici, ki je koncentrična dani. Tetivi A_1A_n in B_1B_n sta tangenti na manjšo krožnico.

   Konec dokaza. ■

   S pomočjo te trditve lahko večkotnik $A_1A_2\dots A_n$ kontruiramo na sledeč način:
   narišemo poljuben $n-$kotnik $B_1B_2\dots B_n$ s stranicami, ki so vzporedne premicam $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Nato narišemo krožnico, ki je koncentrična dani krožnici in se dotika B_1B_n. Iz točke P konstruiramo tangento na to krožnico. To je nosilka stranice A_1A_n. Nadaljevanje ni več težko.

ii) $k \Rightarrow k+1$
Indukcijska predpostavka: *$n-$kotnik, katerega k zaporednih stranic gre skozi k danih točk, ostalih $n-k$ stranic pa je vporednih danim premicam, znamo konstruirati.*

Sedaj želimo konstrurati $n-$kotnik, katerega $k+1$ sosednjih stranic
A_1A_2, $A_2A_3, \dots, A_{k+1}A_{k+2}$ naj gre skozi $k+1$ danih točk P_1, $P_2, \dots, P_{k+1}$, ostalih $n-k-1$ pa je vzporednih danim premicam.



Slika 2

Na sliki 2 vidimo, da lahko konstruiramo večkotnik $A_1A_2A_3\ldots A_n$, če znamo konstruirati večkotnik $A_1A_2'A_3\ldots A_n$, ki ima z iskanim skupna vsa oglišča razen A_2' in stranico A_1A_2' vzporedno premici skozi točki P_1 in P_2.
Če podamo še eno točko, recimo P_2', skozi katero naj gre stranica $A_2'A_3$ imamo sledečo situacijo:
konstruirati želimo $n-$kotnik $A_1A_2'\ldots A_n$, katerega k sosednjih stranic $A_2'A_3$, $A_3A_4,\ldots,A_{k+1}A_{k+2}$ gre skozi k točk P_2', $P_3,\ldots,P_{k+1}$. Ostalih $n-k$ stranic $A_{k+2}A_{k+3},\ldots,A_nA_1$, A_1A_2' pa je vzporednih danim premicam.
Želeni večkotnik znamo narisati po indukcijski predpostavki.

Zaenkrat smo predpostavili, da imamo še nekje dano točko P_2'. Vendar je očitno, da je lega te točke odvisna od začetnih podatkov. Pa si poglejmo, kako jo dobimo.
Skozi oglišče A_1 narišemo vzporednico k premici skozi točki P_1 in P_2. Presek vzporednice s krožnico označimo z A_2'. Točka P_2' je presek premice skozi točki P_1 in P_2 s premico skozi A_2' in A_3.

Trditev: *Lega točke P_2' je neodvisna od točk A_2 in A_3.*

Dokaz: S slike 2 vidimo, da je

$$\angle A_2P_1P_2 = \angle A_2A_1A_2',$$

saj so po konstrukciji kraki vzporedni. Potem opazimo

$$\angle A_2A_1A_2' = \angle A_2A_3P_2',$$

saj sta to obodna kota nad lokom A_2A_2'. Iz teh dveh enakosti dobimo

$$\angle A_2P_1P_2 = \angle A_2A_3P_2'.$$

Zaradi sovršnosti sta enaka še kota

$$\angle A_2P_2P_1 = \angle P_2'P_2A_3.$$

Torej sta trikotnika $\triangle P_1A_2P_2$ in $\triangle A_3P_2'P_2$ podobna. Od tod sledi

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{A_3P_2}} = \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2'P_2}}.$$

Izrazimo $\overline{P_2'P_2}$ in dobimo

$$\overline{P_2'P_2} = \frac{\overline{A_3P_2}\cdot\overline{A_2P_2}}{\overline{P_1P_2}}.$$

Izraz v števcu je absolutna vrednost potence točke P_2 glede na dano krožnico.

Torej velja

$$\overline{P_2'P_2} = \frac{|\overline{SP_2}^2 - r^2|}{\overline{P_1P_2}},$$

kjer je r polmer krožnice, S pa središče.
Vidimo, da točka P_2' res ni odvisna od točk A_2 in A_3.

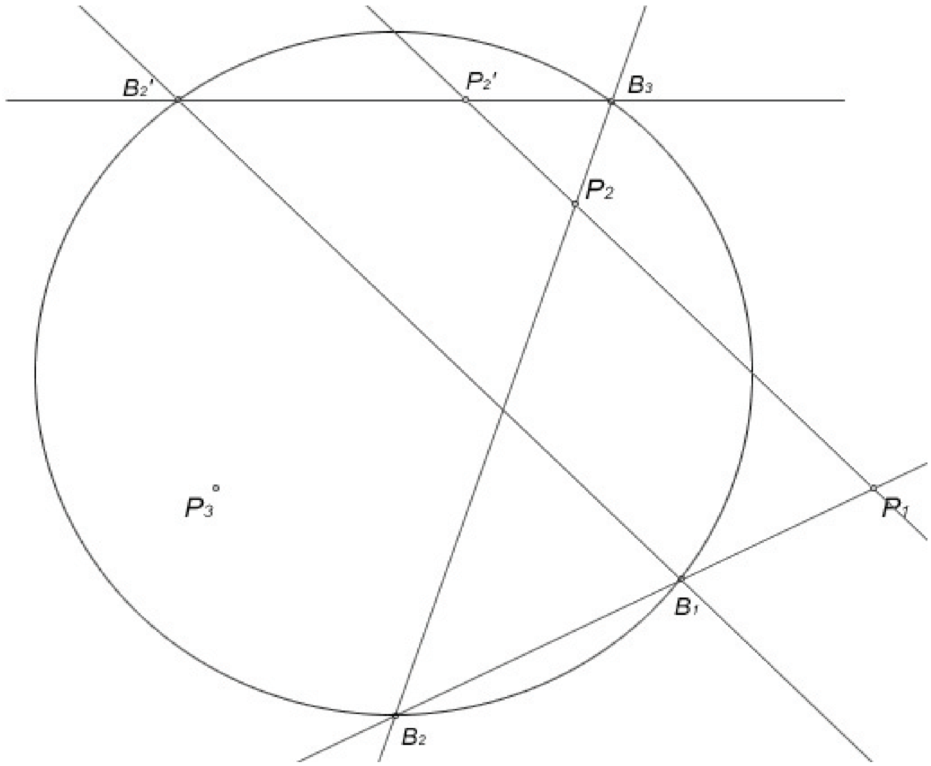
Konec dokaza. ■

Opomba: *Dejansko sploh ni pomembno, da sta to oglišči iskanega večkotnika. Lahko ju poljubno izberemo na krožnici, samo da se premici $p(A_3, P_2)$ in $q(A_1, P_1)$ sekata na njej.*

Pravzaprav si lahko izberemo poljubno točko B_2 na krožnici. Iz nje potegnemo premici skozi P_1 in P_2. Preseka teh dveh premic s krožnico označimo z B_1 in B_3. Nato skozi točko B_1 narišemo vzporednico k premici skozi P_1 in P_2. Presek te premice s krožnico označimo z B_2'. Točka P_2' je presečišče premice skozi P_1 in P_2 s premico skozi B_2' in B_3. (slika 3)

Za predstavo si oglejmo posamezne korake za najlažji primer, za $n = 3$.
Dana je krožnica in točke P_1, P_2, P_3. Konstruirati želimo trikotnik $A_1A_2A_3$, tako da točka P_1 leži na nosiliki A_1A_2, P_2 na nosiliki A_2A_3 in P_3 na nosilki stranice A_3A_1.
Pa si poglejmo, kako bi ga konstruirali po posameznih korakih:

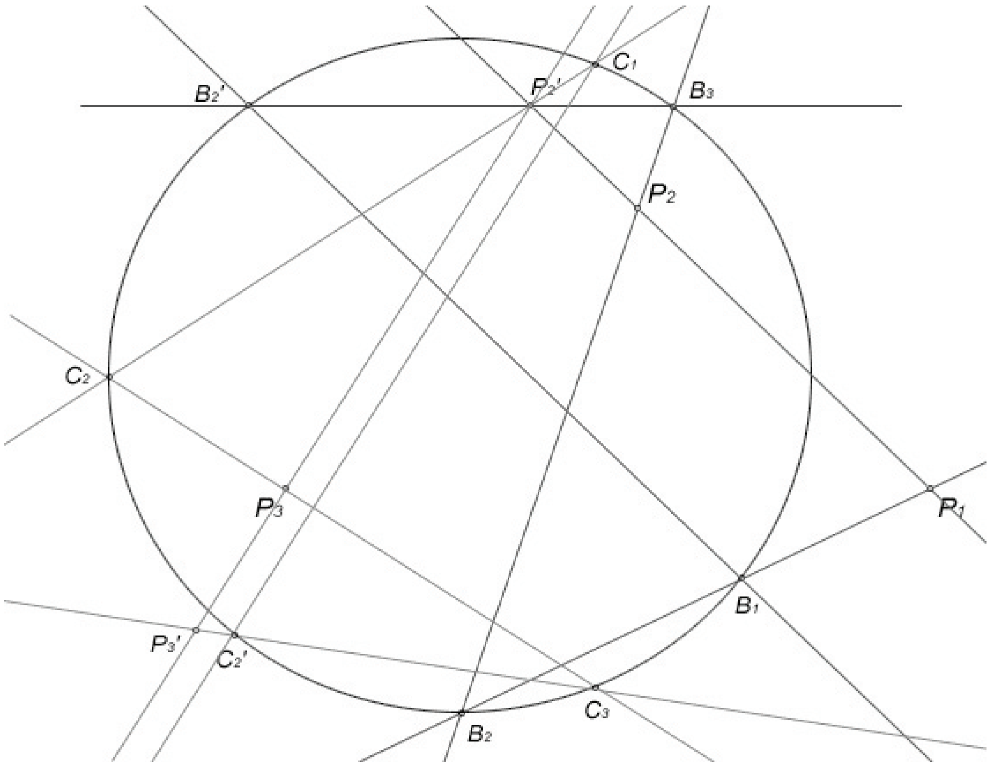
1. korak



Slika 3

Na način, opisali smo ga že na prejšnji strani (izbor točke B_2, da dobimo točko P_2'), točki P_1 in P_2 zamenjamo za premico skoznju in za točko P_2'.

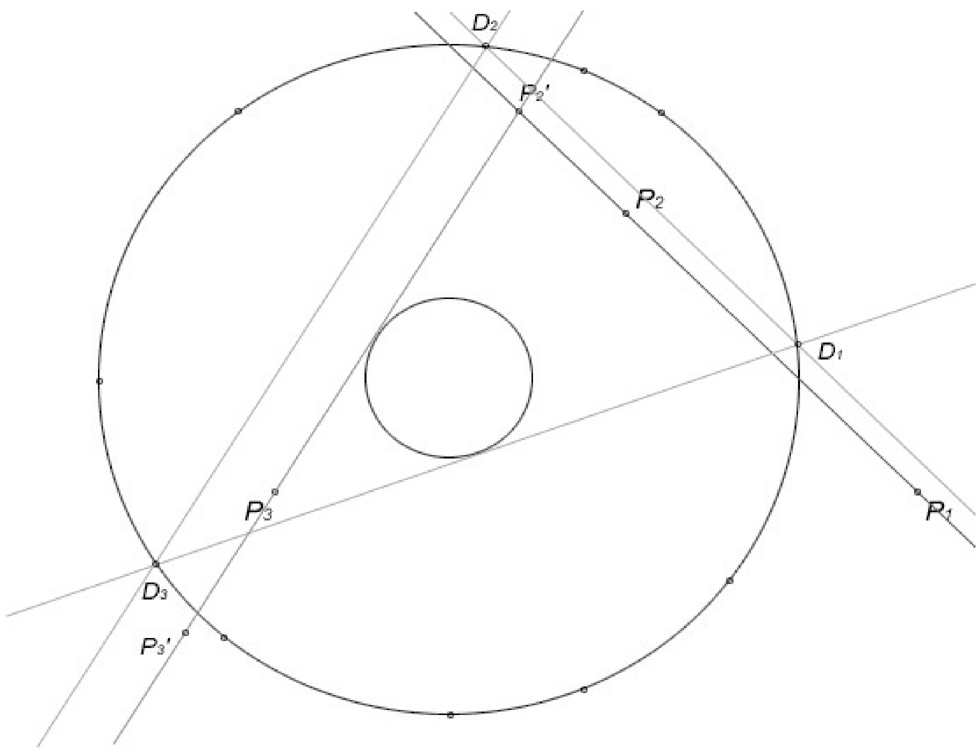
2. korak



Slika 4

Na sliki 4 je prikazan 2. korak, ki je podoben prvemu. Le da si tokrat izberemo točko C_2. Zamenjamo točki P_2' in P_3 s premico skoznju in s točko P_3'.

3. korak

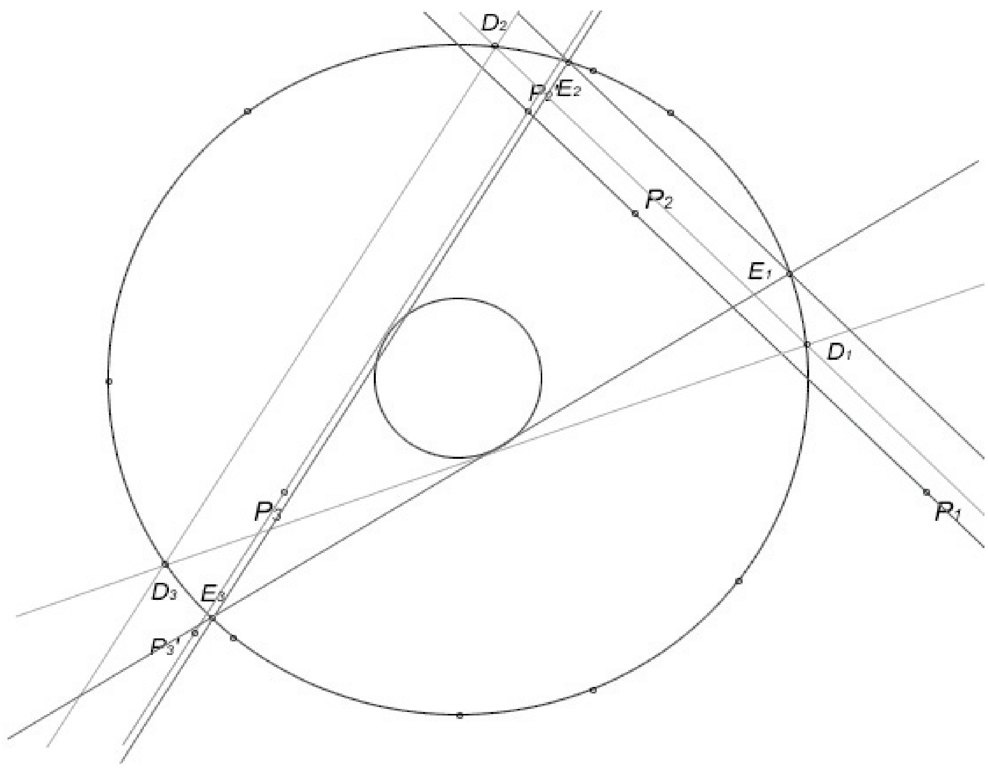


Slika 5

Sedaj imamo dve premici, ena gre skozi točki P_1 in P_2, druga pa skozi P_2' in P_3 in točko P_3'. Najprej narišemo trikotnik, ki ima 2 stranici vzporedni tema dvema premicam. To ni nikakršen problem.

Preseka poljubne vzporednice k premici skozi točki P_2' in P_3 s krožnico označimo z D_2 in D_3. Skozi oglišče trikotnika D_2 potegnemo vzporednico k premici skozi točki P_1 in P_2 in presek s krožnico označimo z D_1. Dobimo trikotnik $D_1D_2D_3$.

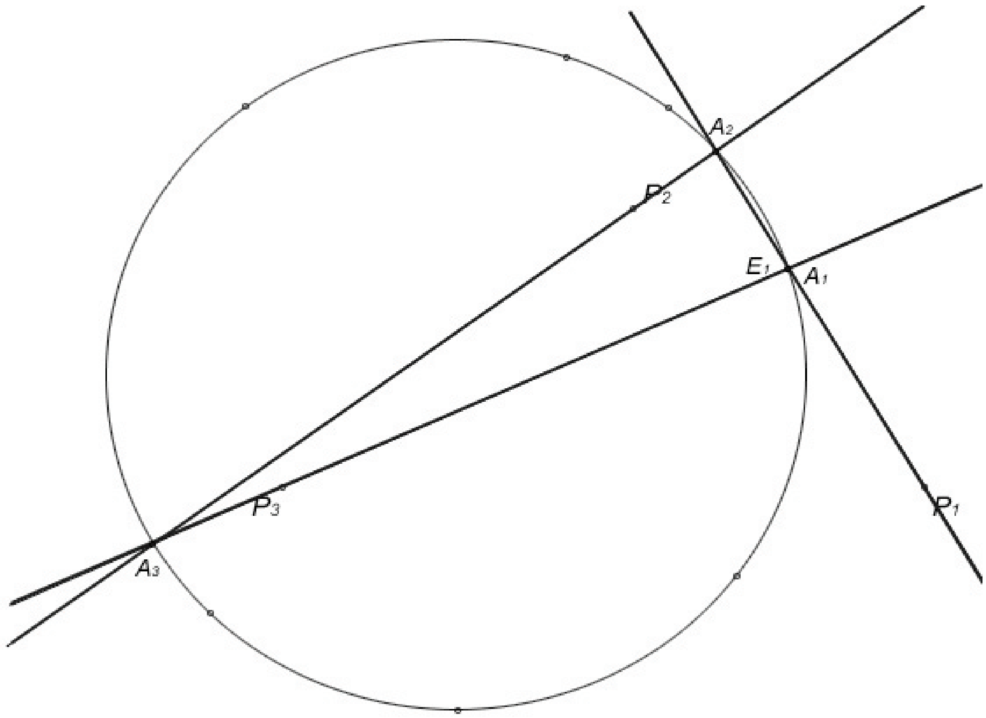
4. korak



Slika 6

Na tej sliki je narisan trikotnik $E_1E_2E_3$, ki smo ga narisali s pomočjo konstrukcije opisane v primeru, če je n liho število.
Najprej narišemo koncentrično krožnico k dani krožnici, ki ima nosilko stranice D_1D_3 za tangento. Skozi točko P_3' potegnemo tangento na to krožnico. Preseka te tangente z večjo krožnico označimo z E_1 in E_3. Preostalo oglišče trikotniko E_2 dobimo tako, da skozi E_1 ali E_3 narišemo vzporednico k premici skozi točki P_1 in P_2 oz. k premici skozi P_2' in P_3.
Zaradi preglednosti smo narisali le eno rešitev. V resnici imamo dve tangenti na manjšo krožnico skozi točko P_3'.

5. korak



Slika 7

Tu imamo že narisan iskani trikotnik. Pa si poglejmo, kako smo ga dobili. Oglišče E_1 kar proglasimo za oglišče A_1. Sedej pa upoštevamo sliko 2 in ga v dveh korakih narišemo. Ker mora točka P_3 ležati na nosilki stranice A_1A_3, oglišče A_3 dobimo najlažje tako, da potegnemo premico skozi točki A_1 in P_3. Presek premice s krožnico je iskana točka. Na podoben način dobimo oglišče A_2 le, da gre tokrat za presek krožnice s premico skozi točki A_3 in P_2.

Opomba: *Obstaja še ena rešitev, saj smo v 4. koraku upoštevali samo eno tangento.*